

**Auswirkung verschiedenartiger
Nutzenfunktionen auf optimale
Spar- und Anlageentscheidungen
privater Investoren im Lebenszyklusmodell**

Diplomarbeit

eingereicht bei
Prof. Dr. Raimond Maurer
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre,
insbesondere Investment,
Portfolio Management und Alterssicherung
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

von
cand. Hdl. Christoph Gomoll

Am Auweg 20
60437 Frankfurt am Main
Tel.: 06101 541000
ch.gomoll@gmx.net

Studienrichtung: Wirtschaftspädagogik
14. Fachsemester
Matrikelnummer: 2560988

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	II
Tabellenverzeichnis.....	IV
Abkürzungsverzeichnis.....	V
Symbolverzeichnis.....	VI
1 Problemstellung.....	1
2 Nutzen und Nutzenfunktionen.....	2
2.1 Grundlagen der Nutzenbewertung mit Nutzenfunktionen.....	2
2.2 Die CRRA-Nutzenfunktion und ihre Kritikpunkte.....	7
2.3 Alternativen zur CRRA-Nutzenfunktion.....	12
3 Das Lebenszyklusmodell.....	19
3.1 Entscheidungen im intertemporalen Kontext.....	19
3.2 Einflüsse auf rationale Sparentscheidungen.....	25
3.3 Budgetbeschränkungen und Konsumhypothesen.....	28
3.4 Das Arbeitseinkommen im Lebenszyklus.....	34
3.5 Die Modellierung des Kapitaleinkommens.....	38
3.6 Erfassung stochastischer Einflüsse.....	42
4 Der Lösungsweg des Optimierungsproblems.....	45
5 Berechnungsergebnisse.....	47
5.1 Optimale Spar- und Anlageentscheidungen.....	47
5.2 Auswirkungen verschiedenartiger Nutzenfunktionen.....	53
6 Fazit.....	55
Anhang.....	57
Literaturverzeichnis.....	58
Quellenverzeichnis.....	62
Ehrenwörtliche Erklärung.....	63

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Funktionsverlauf $U(C)$ von CRRA-Nutzenfunktionen mit $\gamma > 1$	10
Abbildung 2: $U(C,W)$ von „Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktionen.....	13
Abbildung 3: $U(C_{ind}, C_{ext}=C_m)$ von „Consumption Externality“-Nutzenfunktionen	15
Abbildung 4: $U(C,\gamma)$ von TRA-Nutzenfunktionen mit variablem γ	17
Abbildung 5: $U(C,T)$ von TRA-Nutzenfunktionen mit variierten Laufzeiten T	17
Abbildung 6: $U(C)$ von rekursiven Nutzenfunktionen nach Epstein-Zin.....	19
Abbildung 7: Iteration der optimalen Lösung mit $\gamma=0,25$ und $\beta=0,9$	22
Abbildung 8: Iteration der optimalen Lösung mit $\gamma=1,55$ und $\beta=0,9$	22
Abbildung 9: Optimaler Konsum für $\gamma=0,25$ und $\beta=0,9$	23
Abbildung 10: Optimaler Konsum für $\gamma=1,55$ und $\beta=0,9$	23
Abbildung 11: Optimaler Konsum für $\gamma=1,00$ und $\beta=0,9$	24
Abbildung 12: Simulationen des Einkommensverlaufs.....	37
Abbildung 13: Charakteristischer Verlauf als Mittelwert einer Simulation.....	37
Abbildung 14: Simulation der Wertentwicklungen unsicherer Investments.....	41
Abbildung 15: Durchschnitt unsicherer und Wertentwicklung sicherer Anlagen....	41
Abbildung 16: Spar- und Aktienquoten für CRRA-Nutzen.....	48
Abbildung 17: Spar- und Aktienquoten für „Spirit of Capitalism“-Nutzen.....	48
Abbildung 18: Spar- und Aktienquoten für „Consumption Externality“-Nutzen....	49
Abbildung 19: Spar- und Aktienquoten für TRA-Nutzen.....	49
Abbildung 20: Spar- und Aktienquoten für Epstein-Zin-Nutzen.....	50
Abbildung 21: „Consumption Externality“ Vermögens- und Konsumpfad.....	51
Abbildung 22: „Spirit of Capitalism“ Periodennutzen U und Gesamtnutzen V	51
Abbildung 23: Vermögens- und Einkommenssparquote bei Epstein-Zin-Nutzen....	52
Abbildung 24: Standardabweichungen von s_W und s_Y mit TRA-Nutzen.....	52
Abbildung 25: Vergleich der Vermögenssparquoten s_W	53

Abbildung 26: Vergleich der Vermögenspfade W.....	53
Abbildung 27: Vergleich der Aktienquoten α.....	54
Abbildung 28: Vergleich der Einkommenssparquoten s_Y.....	55
Abbildung 29: Vergleich der Standardabweichungen von s_W.....	55

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Verwendete Parameter und Rechenzeit der Optimierung.....	47
----------------------------------------------------------------------------	-----------

Abkürzungsverzeichnis

ARA	Absolute Risk Aversion
CARA	Constant Absolute Risk Aversion
CRRA	Constant Relative Risk Aversion
C-CAPM	Consumption Capital Asset Pricing Modell
EIS	Elasticity of Intertemporal Substitution
RRA	Relative Risk Aversion
TRA	Temporal Risk Aversion

Symbolverzeichnis

α :	Aktienquote
α :	langfristige Risikoaversion für „Temporal Risk Aversion“
β :	Diskontfaktor
γ :	Risikoaversion
δt :	Zeitinkrement
ε :	temporärer Schock im Arbeitseinkommen
ε :	Stochastik des Wiener Prozesses
λ :	Statusbewusstsein für „Spirit of Capitalism“
λ :	Ruhestandsfaktor im Arbeitseinkommen
κ :	Justierungsfaktor für „Spirit of Capitalism“
κ :	Neidparameter für „Consumption Externality“
μ :	Renditeerwartungswert
ψ :	Elastizität der Intertemporalen Substitution
σ :	Volatilität der Rendite
θ :	Grad der Trennung von Risikoaversion und EIS
ν :	temporärer Schock im Arbeitseinkommen
ω :	individueller temporärer Schock
ξ :	gesamtwirtschaftlicher temporärer Schock

1 Problemstellung

Wir leben in einer Gesellschaft, die ihren Mitgliedern einen möglichst großen Freiraum zur Entfaltung der eigenen Persönlichkeit bietet. Die dadurch gebotenen Freiheiten eröffnen vielfältige Entscheidungsspielräume in nahezu allen Bereichen des täglichen Lebens. Unter Beachtung eigener Ziele und subjektiv wahrgenommener Randbedingungen wählen Menschen die für sie am günstigsten erscheinenden Handlungsmöglichkeiten aus.

Die Verhaltensweisen von und die Interaktionen zwischen Individuen, Gruppen und Institutionen sind der wesentliche Untersuchungsgegenstand der Sozialwissenschaften (vgl. Rogall 2006, S. 25). Als Teil davon, richten die Wirtschaftswissenschaften ihre Aufmerksamkeit insbesondere auf Zusammenhänge in und zwischen den Bereichen Arbeit, Konsum, Investition, Kapital, Handel und Geld, um diese in stationären oder zeitlich dynamischen Systemen zu analysieren. Die hier vorgelegte Arbeit behandelt unter der Überschrift „Auswirkung verschiedenartiger Nutzenfunktionen auf optimale Spar- und Anlageentscheidungen privater Investoren im Lebenszyklusmodell“ einen Themenkomplex, der im wesentlichen die Bereiche Arbeit, Konsum, Investition und Kapital berührt. Im Mittelpunkt steht dabei das Entscheidungsproblem zwischen heutigem Konsum und heutigem Sparen zugunsten morgigen Konsums. Schwerpunkte werden auf die Erörterung theoretischer Grundlagen und die Implementierung numerischer Rechenverfahren gesetzt.

Um eine Entscheidung für ein bestimmtes Verhalten treffen zu können, müssen das angestrebte Ziel einer Handlung bekannt und die zur Auswahl stehenden Alternativen klar umrissen sein. Besteht bei einer oder mehreren Alternativen Unsicherheit über deren Ausprägung, wie etwa über die Rendite einer Kapitalanlage, sind zusätzlich die möglichen Ereignisse je Alternative zu definieren und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten abzuschätzen. Ein weiterer Effekt von Unsicherheit ist, dass Ziele dann nicht mehr absolut formuliert werden können, stattdessen wird vielmehr ein Optimum angestrebt (vgl. von Nitzsch 2002, S. 84-85).

Aus dem Schema der Entscheidungsfindung ergibt sich eine zentrale Problemstellung: Wenn zum Erreichen eines Optimums oder eines absoluten Ziels ein Lösungsansatz ausgewählt werden soll, muss ein Konzept existieren, nach dem die möglichen Alternativen bewertet werden. In den Wirtschaftswissenschaften hat sich dazu das Konzept des Nutzens etabliert, in dem vielerlei Größen subsumiert werden können, wie etwa Vermö-

gen, Konsum, Freizeit, Rendite oder Risiko. Im Nutzenkonzept kommen individuelle Präferenzen zum Ausdruck, der Nutzenwert ist das Maß für die Befriedigung der menschlichen Bedürfnisse (vgl. Cuthbertson 2000, S. 10).

Wenn der optimale Nutzen das Fundamentalziel einer Entscheidung ist, muss er für eine Untersuchung auch mathematisch formuliert werden. Neben den bereits genannten Größen können in diesen Nutzenfunktionen auch Aussagen zur Risikoneigung und zu den Zeitpräferenzen eines Individuums modelliert werden. Nutzenfunktionen werden stets als Teil eines Modells zur Untersuchung einer speziellen Fragestellung eingesetzt. So wie es in den Wissenschaften verschiedene konkurrierende Modelle gibt, die ein Phänomen erklären sollen, gibt es auch unterschiedliche Typen von Nutzenfunktionen, die zur Untersuchung ein und derselben Fragestellung herangezogen werden.

Diese Arbeit beschreibt zunächst im zweiten Kapitel die Motive zum Einsatz von Nutzenfunktionen sowie ihre prinzipiellen Eigenschaften und arbeitet ihre Unterschiede anhand einiger Beispiele exemplarisch aus. Anschließend wird im dritten Kapitel das Thema der Nutzenoptimierung eines Privatanlegers modelliert und das Rechenverfahren auf Basis der Monte-Carlo-Simulation erläutert. Die Implementierung des Rechenmodells wird im vierten Kapitel beschrieben. Schließlich werden im fünften Kapitel die berechneten Ergebnisse präsentiert und diskutiert um auf dieser Basis ein abschließendes Fazit als sechstes Kapitel ziehen zu können.

Die in dieser Arbeit verwendeten Daten dienen lediglich zur Veranschaulichung des Rechengangs und zur Ausarbeitung der Auswirkungen des Einsatzes unterschiedlicher Nutzenfunktionen. Somit ist diese Untersuchung eher theoretisch als empirisch ausgerichtet. Ferner ist die Modellierung bewusst implementierungsfreundlich gehalten, wodurch deren Aussagekraft limitiert wird. Schließlich ist noch anzumerken, dass alle personenbezogenen Formulierungen sich unabhängig von der im Wortlaut gebrauchten Form stets auf beide Geschlechter beziehen.

2 Nutzen und Nutzenfunktionen

2.1 Grundlagen der Nutzenbewertung mit Nutzenfunktionen

Die grundlegende Optimierungsregel für rationales Verhalten eines Individuums in einer unsicheren Umgebung ist die Maximierung des Erwartungsnutzens. Dies gilt als gesicherte Grundlage der wissenschaftlichen Entscheidungslehre und beruht auf den Arbeiten von Bernoulli, Ramsey, von Neumann und Morgenstern (siehe dort: Bernoulli

1954, Ramsey 1931, von Neumann/Morgenstern 1953). Ein Individuum verhält sich demnach so, als ob es den ihm zur Auswahl stehenden Gelegenheiten Nutzenwerte zuordnet und diejenige Gelegenheit oder Kombination von Gelegenheiten auswählt, die seinen Erwartungsnutzen maximiert (vgl. Bicksler 1974, S. 1).

Gemäß der Entscheidungslehre erfolgt die Bestimmung des Nutzens durch Nutzenfunktionen, welche die Präferenzen von Individuen widerspiegeln. Die Schätzung der zu erwartenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die Gewichtung des Nutzens aus den möglichen Ereignissen der Auswahloptionen mit den geschätzten Wahrscheinlichkeiten führen zur Ermittlung des Erwartungsnutzens (vgl. Champnowne 1969, S. 30). Wie das im Einzelnen vollzogen wird und welche Annahmen dem zu Grunde liegen, wird im Folgenden erläutert.

Bei Fragen rund um Kapitalanlagen stehen zunächst natürlich Größen wie Rendite je Periode und finaler Vermögensstand im Vordergrund. Ebenso nahe liegend und relevant ist die Betrachtung des mit den Renditen verbundenen Risikos, welches sich nicht nur auf die Möglichkeit negativer Renditen und Erträge bezieht, sondern im Wesentlichen die empirische Streuung realisierter Werte und die Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Ereignisse beschreibt. Aber auch damit lassen sich die subjektiven Bedürfnisse eines Individuums noch nicht umfassend analysieren. Folglich kann auf dieser Basis auch keine Entscheidung eines Individuums nachvollzogen werden.

Die Grundlage einer individuellen Entscheidung ist primär nicht die objektive Sachlage sondern die subjektive Bewertung derselben. Die Wertschätzung von Begebenheiten kann als Maß einer Zufriedenheit angesehen werden, einfacher ausgedrückt wird der Grad der Bedürfnisbefriedigung schlichtweg als Nutzen beschrieben. Dieser Nutzen sollte in einer Analyse stets auf möglichst fundamentale Ziele bezogen werden. Für Individuen geht es vorrangig nicht um Renditen und Volatilitäten, vielmehr stehen elementare Bedürfnisse wie Konsum oder auch Wohlstand im Mittelpunkt des Interesses (vgl. von Nitzsch 2002, S. 89-91).

Eine bestimmte Menge an Konsum eines Guts oder einer Dienstleistung führt zu einer bestimmten Zufriedenheit. Eine doppelte Menge desselben Konsums führt nicht unbedingt zur doppelten Zufriedenheit. Eher wenige Menschen besuchen eine Theateraufführung mehrmals oder schauen sich einen Film zweimal hintereinander an. Der Genuss aus dem Konsum eines Eisbechers im Eiscafé lässt sich durch einen zweiten vielleicht noch steigern, aber wahrscheinlich nicht mehr verdoppeln. Menschen tragen teure oder billige Kleidung, aber sie tragen eben nur eine begrenzte Anzahl von Kleidungsstücken,

eventuell lässt sich der Nutzen in diesem Segment sogar nach oben hin beschränken. Auf jeden Fall kann in allen Beispielen von einem kleiner werdenden zusätzlichen Nutzensgewinn bei weiter ansteigendem Konsum ausgegangen werden. Dieser Sättigungseffekt wird als abnehmender Grenznutzen bezeichnet. Im Zusammenhang mit Unsicherheiten ist ein abnehmender Grenznutzen mit einer risikoaversen Nutzenbewertung verbunden. Mathematisch dargestellt ergibt sich durch Sättigungseffekt und Risikoaversion eine Nutzenfunktion mit konkavem Verlauf (vgl. Cuthbertson 2000, S. 11).

Die kardinale Formulierung der Nutzenbewertung per Funktion eröffnet auch die Möglichkeit zur Analyse mehrperiodiger Probleme, Zahlenwerte verschiedenerer Zeitabschnitte können miteinander verglichen oder zusammengefasst werden. Somit können gleichermaßen Entscheidungen zu intertemporalen Problemen mit Aktionsmöglichkeiten in mehreren Zeitabschnitten gefällt werden. Für den frühesten Betrachtungszeitpunkt wird dazu ein Gesamtnutzen ermittelt, der sich aus den progressiv abdiskontierten Nutzenwerten der einzelnen Perioden ergibt. Eine häufig verwendete Form ist die Addition separater und zeitlich abdiskontierter periodenbezogener Nutzenwerte. Dem konstanten Diskontfaktor liegt dabei eine ebenso konstante Diskontrate zugrunde. Diese stellt eine subjektive Rate für die Zeitpräferenz dar. Zu dieser Rate ist ein Individuum bereit, seinen Nutzen zwischen zwei Perioden zu tauschen, wohlgernekt den Nutzen, nicht den Konsum. In einer Modellierung wird die Diskontrate stets größer als der sichere Zinssatz angesetzt, um eine Präferenz für die Gegenwart zu gewährleisten (vgl. Cuthbertson 2000, S. 14).

Ein typisches intertemporales Problem ist ein Lebenszyklusmodell. Dieses kann über eine endliche Zahl von Perioden laufen oder unendlich viele Perioden umfassen, wobei es dann nicht mehr den Nutzen eines Individuums darstellt, sondern einem Mehrgenerationenmodell mit integrierter Vererbung und fortgesetztem Konsum entspricht. Die Betrachtung eines unendlichen Zeitraums wird hauptsächlich durch die damit verbundene Vereinfachung einer analytischen Lösung motiviert. Die Unsicherheit über den Todeszeitpunkt eines Individuums muss dann im Modell nicht berücksichtigt werden. Hilfreich ist zudem, dass auch bei zeitlich unendlicher Betrachtung der Gesamtnutzen begrenzt bleibt, sofern er als Summe oder Integral über abdiskontierte Periodenwerte formuliert wird. In derartigen Mehrperiodenmodellen entspricht die Summe der Diskontfaktoren einer geometrischen Reihe mit analytisch eindeutigem Grenzwert.

So wie Nutzen auf Basis von Konsum oder Vermögen beurteilt wird, nämlich dass mehr besser als weniger ist, sollten auch entsprechende Nutzenfunktionen aufgebaut sein. Bei

sachgemäßer Definition wird die erste Ableitung einer derartigen Nutzenfunktion daher nie negativ sein. Die zweite Ableitung beinhaltet eine Aussage zum Risikoverhalten. Ist sie negativ, dann liegt risikoscheues Verhalten vor. Bei positiver zweiter Ableitung liegt Risikofreudigkeit vor. Risikoneutralität besteht entsprechend bei einer zweiten Ableitung gleich Null. Risikoaverse Investoren haben folglich einen abnehmenden Grenznutzen. Je höher das Vermögens- oder Konsumniveau bereits ist, desto geringer wird der zusätzliche Nutzen durch eine weitere Einheit Vermögen oder Konsum (vgl. Cuthbertson 2000, S. 11).

Das Risikoverhalten lässt sich auch anhand absoluter Größen beschreiben. Wenn der Nutzen aus dem Erwartungswert eines unsicheren Spiels in Form einer Lotterie höher ist, als der Erwartungsnutzen, den ein Spieler in der Lotterie sieht, so ist der Spieler risikoscheu. Ein risikoaverses Individuum wird bei Betrachtung seines Erwartungsnutzens ein faires Spiel also ablehnen, da ihm der separat betrachtete Nutzen aus dem Preis des Spiels, den es zu zahlen hätte, höher erscheint, als der Erwartungsnutzen des Spiels. Um dennoch an dem Spiel teilzunehmen, würde der Spieler eine Risikoprämie verlangen. Wäre er demgegenüber bereit eine Risikoprämie zu zahlen, so wäre er risikofreudig (vgl. von Nitzsch 2002, S. 128-129). Für Fälle, in denen mehr nicht besser sondern eher schlechter als weniger ist, sind die vorstehenden Aussagen unter umgekehrten Vorzeichen zu betrachten. Dies gilt beispielsweise dann, wenn der Nutzen aus einer Wartezeit betrachtet wird: ein Krankenwagen sollte möglichst schnell am Unfallort erscheinen, eine Nachricht sollte in möglichst kurzer Zeit überbracht werden (vgl. Keeney/Raiffa 1976, S. 141).

Um nicht in Widersprüchlichkeiten zu enden, kann also das Risikoverhalten nicht alleine aufgrund der zweiten Ableitung einer Nutzenfunktion beurteilt werden. Zeitlich parallel aber im Wesentlichen unabhängig voneinander haben Arrow, Pratt und andere (siehe dort: Pratt 1964), ein Maß für die Risikoaversion entwickelt, das heute als Arrow-Pratt Maß bezeichnet wird.

$$ARA = \frac{-U''}{U'} \quad (2.1.1)$$

Die Gleichung (2.1.1) gibt für steigende Werte eine steigende absolute Risikoaversion ARA an. RRA ist die relative Risikoaversion (vgl. Merton 1997, S. 20).

$$RRA = ARA \cdot W \quad \text{oder} \quad RRA = ARA \cdot C \quad (2.1.2)$$

Aus elementarer Sichtweise ist der Konsum die primäre Quelle von Nutzen, so wie es in mikro- oder makroökonomischen Modellen berücksichtigt wird. Im Finanzbereich steht dagegen die Konsumententscheidung nicht uneingeschränkt im Mittelpunkt. Als relevanter wird dort häufig der Nutzen aus Vermögen angesehen, um bei der Kapitalanlage mit Modellen arbeiten zu können, die auf eine maximale Kapitalvermehrung ausgerichtet sind. Das Maß der Risikoaversion gilt für beide Fälle, auch wenn es ursprünglich für Nutzen aus dem Vermögen entwickelt wurde.

Wenn ein Investor bei schwankendem Vermögen immer den gleichen Anteil seines Vermögens riskant anlegt, so hat er eine konstante relative Risikoaversion und eine sinkende absolute Risikoaversion. Wenn dagegen der riskant angelegte Betrag konstant bleibt, sinkt dessen Anteil bei steigendem Vermögen, die relative Risikoaversion nimmt somit zu, die absolute Risikoaversion bleibt stattdessen konstant, wie folgendes Beispiel demonstriert.

$$U = a - b \cdot e^{-c \cdot W} \quad \text{mit} \quad U' = b \cdot c \cdot e^{-c \cdot W} \quad \text{und} \quad U'' = -b \cdot c^2 \cdot e^{-c \cdot W} \quad (2.1.3)$$

Daraus ergibt sich die absolute Risikoaversion dieser exponentiellen Nutzenfunktion gemäß der Definition des Arrow-Pratt-Maßes zu:

$$ARA = c \quad (2.1.4)$$

Die Annahme einer konstanten absoluten Risikoaversion, auch CARA genannt, lässt sich jedoch intuitiv nur schwerlich nachvollziehen und stößt zudem in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur auf Widerspruch (vgl. Merton 1997, S. 118). Erst mit einer Erweiterung können exponentielle Nutzenfunktionen eine nahezu konstante relative Risikoaversion aufweisen. In einer Art „Consumption Externality“ wird das Gewohnheitsniveau des Konsums berücksichtigt, indem ein Quotient aus dem variablen Konsum und einem extern oder historisch vorgegebenen Konsumniveau gebildet wird (vgl. Alpanda/Woglom 2007, S. 3).

Unter Annahme normalverteilter Renditen lässt sich eine Maximierung des Erwartungsnutzens auf Basis der zuvor skizzierten exponentiellen Nutzenfunktion auf die Maximierung der Funktion (2.1.5) zurückführen (vgl. Cuthbertson 2000, S. 55).

$$E[r] - \frac{c}{2} \cdot \sigma(r)^2 \quad (2.1.5)$$

Ausschlaggebend für die Nutzenmaximierung sind dann neben der Risikoaversion c nur die erwarteten Renditen $E[r]$ und deren Volatilitäten $\sigma(r)$, woraus sich das finanzwirtschaftliche Standardproblem der μ - σ -Optimierung für Portfolioentscheidungen ergibt.

Die bereits erwähnte fundamentale Sichtweise, dass Nutzen primär aus Konsum und nicht aus Vermögen stammt, hat auch in finanzwirtschaftlichen Kapitalmarktmodellen Einzug gefunden. Im traditionellen Capital Asset Pricing Modell CAPM zielt ein Investor darauf ab, die größtmögliche Rendite für ein bestimmtes Risikoniveau zu erreichen. Eine andere Herangehensweise, die den Konsum in den Mittelpunkt stellt und als C-CAPM abgekürzt wird, lässt einen Investor seinen Erwartungsnutzen aus Konsum optimieren. Nebenbedingung definieren den Konsum in diesem Modell als Summe der Dividendenzahlungen und der realisierten Kursgewinne bei Umschichtungen eines Portfolios. Wie bei der Ermittlung des Erwartungsnutzens über mehrere Perioden hinweg üblich, werden zukünftige Periodennutzen mit einem konstanten Faktor, der die Zeitpräferenzen eines Investors angibt, abdiskontiert. Ein Ergebnis des C-CAPM ist, dass die erwarteten Renditen von Kapitalanlagen negativ mit der Grenzrate der Substitution des Konsums korreliert sind. Ein zurückhaltender aktueller Konsum ist demnach mit Erwartungen hoher zukünftiger Renditen verbunden (vgl. Cuthbertson 2000, S. 83-85).

Auch Teilaspekte eines Problems können mittels einer Nutzenbetrachtung optimiert werden. So haben Qian, Hua und Sorensen eine Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung von Transaktionskosten vorgestellt, die auf einer Nutzenberechnung über variierende Portfoliogewichte basiert. Das Ergebnis ist eine neue Gewichtung, in der die nutzenbringenden Vorteile höherer Renditen mit den Nachteilen erforderlicher Portfolioumschichtungen im Gleichgewicht stehen (vgl. Qian/Hua/Sorensen 2007 S. 398-399).

Aufgrund der genannten unterschiedlichen Untersuchungsgegenstände ist es nahe liegend, dass Nutzenfunktionen nicht nur auf verschiedene Größen bezogen werden sondern auch unterschiedlich formuliert sind. Hauptmotiv für variierende Typen von Nutzenfunktionen bleiben aber deren spezifische Eigenschaften, wie etwa in Bezug auf Risikoaversion, und unterschiedlich adäquate Ergebnisse, die die unterschiedlichen Typen von Nutzenfunktionen bei der empirischen Analyse ein und desselben Problems liefern. Eine Auswahl bedeutender Nutzenfunktionen wird nachfolgend vorgestellt.

2.2 Die CRRA-Nutzenfunktion und ihre Kritikpunkte

Nutzenfunktionen sind mathematische Werkzeuge, die in analytischen Untersuchungen eingesetzt werden, um menschliche Verhaltensweisen formelmäßig abzubilden. Ihr Funktionsverlauf ist in den gebräuchlichsten Varianten stetig und mehrfach differenzierbar. Beziehen sich ihre Variablen auf Nutzen aus Konsum oder Vermögen, dann ist die Funktion monoton ansteigend. Gemäß der Wirklichkeit spiegelt ihr typischerweise kon-

kaver Verlauf den Sättigungseffekt im menschlichen Nutzenempfinden wieder. Damit einher geht ein gewisse Risikoaversion: in unsicheren Umgebungen ist der Erwartungsnutzen aus konkaven Nutzenfunktionen geringer als der Nutzen des Erwartungswerts der unsicheren Variablen. Eine weitere aus der Praxis abgeleitete Eigenschaft bezieht sich auf den Nutzen aus Konsum in aufeinander folgenden Perioden. Konkret geht es dabei um die Tauschbereitschaft zwischen heutigem und morgigem Konsum. Wenn heute auf eine Einheit Konsum verzichtet werden soll, muss dies morgen durch eine bestimmte Menge zusätzlicher Konsumeinheiten ausgeglichen werden, um insgesamt ein neutrales Gleichgewicht des Gesamtnutzens der beiden Perioden zu erreichen. Ein Maß für diese Tauschbereitschaft ist die Elastizität der intertemporalen Substitution, im folgenden auch mit EIS abgekürzt. Sie gibt an, wie viele Konsumeinheiten morgen erforderlich sind, wenn heute auf eine Einheit verzichtet werden soll. Die EIS baut auf der intertemporalen Grenzrate der Substitution auf, deren inkrementeller Logarithmus im Nenner des ersten Bruchs zu finden ist (vgl. Georgiev 2004a, S. 6-7).

$$EIS_{t,1} = - \frac{\partial \log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)}{\partial \log \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} \right)} = - \frac{\partial \log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)}{\partial \log \left(\frac{U_{\alpha+1}}{U_\alpha} \right)} = - \frac{\frac{d(C_{t+1}/C_t)}{C_{t+1}/C_t}}{\frac{d(U_{\alpha+1}/U_\alpha)}{U_{\alpha+1}/U_\alpha}} \quad (2.2.1)$$

Bis hierhin wurden Nutzenfunktionen in dieser Arbeit lediglich allgemein beschrieben oder beispielhaft zu Illustrationszwecken eingesetzt, nun werden einige Typen detaillierter erläutert. Die Auswahl der besprochenen Funktionen beschränkt sich dabei auf eine in der Literatur weit verbreitete Form und mehrere daraus hervorgegangene Variationen und Weiterentwicklungen, die insofern verwandt sind, als dass die neuen Funktionen für bestimmte Parametereinstellungen in die prominente Urform der iso-elastischen Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion überführt werden können.

Diese bedeutende Gattung der Nutzenfunktionen ist das klassische Arbeitspferd der modernen Ökonomie. Sowohl in mikro- und makroökonomischen Untersuchungen als auch für Kapitalmarktanalysen wurde und wird diese Nutzenfunktion regelmäßig eingesetzt. Ihre markanteste Eigenschaft ist die konstante relative Risikoaversion, weshalb sie nicht nur als iso-elastische Nutzenfunktion, sondern, gemäß der englischen Abkürzung, auch als CRRA-Nutzenfunktion bekannt ist. Analog zu der konstanten relativen Risikoaversion ist ihre absolute Risikoaversion degressiv. Gemäß der auf den Nutzen aus Vermögen bezogenen Definition nach Arrow und Pratt bedeutet diese Kombination, dass

unabhängig von der Höhe des Vermögens immer ein gleicher Anteil riskant angelegt wird, wobei der absolute Betrag ansteigt. Analog dazu ist bei steigendem Vermögen auch eine konstante Konsumquote belegt worden. CRRA-Nutzenfunktionen können folglich mit den intuitiven Annahmen zu Verhaltensweisen bei steigendem Vermögen in Einklang gebracht werden. Ferner besitzen sie die simple Eigenschaft, dass ihre EIS genau dem Kehrwert ihrer Risikoaversion entspricht. Diese beiden Maßgrößen sind bei CRRA-Nutzenfunktionen also fest miteinander verknüpft (vgl. Liu/Sercu 2008, S. 1-2).

Standardformulierung der CRRA-Nutzenfunktion in Abhängigkeit vom Konsum (vgl. Merton 1997, S. 104)

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{für } \gamma \neq 1 \quad (2.2.2)$$

$$U(C) = \log(C) \quad \text{für } \gamma = 1 \quad (2.2.3)$$

Erste und zweite Ableitung der CRRA-Nutzenfunktion

$$U'(C) = C^{-\gamma} \quad (2.2.4)$$

$$U''(C) = -\gamma \cdot C^{-1-\gamma} \quad (2.2.5)$$

Maße der Risikoaversion, gültig für alle γ der CRRA-Nutzenfunktion

$$ARA = \frac{-U''(C)}{U'(C)} = \frac{\gamma}{C} \quad (2.2.6)$$

$$RRA = \frac{-U''(C)}{U'(C)} \cdot C = ARA \cdot C = \gamma \quad (2.2.7)$$

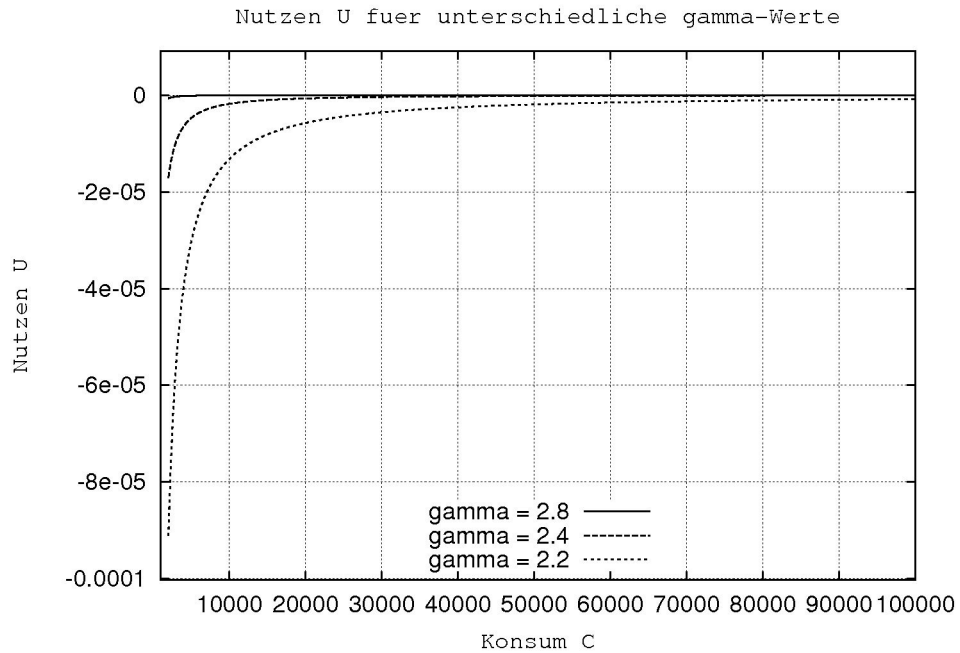


Abbildung 1: Funktionsverlauf $U(C)$ von CRRA-Nutzenfunktionen mit $\gamma > 1$

Für das nachfolgende Unterkapitel wurden bereits eine Reihe von Alternativen angekündigt. Die Beweggründe, die zu den Weiterentwicklungen geführt haben, ergeben sich aus einigen Kritikpunkten. Da CRRA-Nutzenfunktionen so oft und vielfältig zum Einsatz kommen, werden ihre Eigenschaften immer wieder hinterfragt, wenn die Ergebnisse empirischer Analysen zu Kontroversen führen. So geschehen auch für den inversen Zusammenhang zwischen relativer Risikoaversion und Elastizität der intertemporalen Substitution.

Wird aus realem Datenmaterial für Konsum, Konsumsteigerung, Inflationsrate und Anlagenverzinsung ein Modell zur Schätzung der Elastizität der intertemporalen Substitution auf Basis eines CRRA-Nutzenmodells implementiert, so ergeben sich Werte für die EIS, die als erheblich zu niedrig erscheinen, weil sie im Modell empirisch nicht nachvollziehbar niedrige Zinsen bedingen. Als Konsequenz daraus kann zum einen der Zusammenhang zwischen der Elastizität der intertemporalen Substitution und der relativen Risikoaversion in Frage gestellt werden oder das Modell, unter anderem durch Berücksichtigung saisonaler Effekte und einer zeitlich veränderlichen EIS, so abgewandelt werden, dass die Schätzungen der EIS die Erwartungen befriedigen (vgl. Liu/Sercu 2008, S. 8 und Alpanda/Woglom 2007, S. 2-5). Des weiteren kann es bei einer intertemporalen Nutzenbetrachtung in einer sicheren Umgebung möglicherweise auch von Interesse sein, ein Fragestellung völlig ohne Berücksichtigung einer Risikoaversion und nur mit Annahme einer Elastizität der intertemporalen Substitution zu untersuchen.

Ein weiterer selten vorgetragener Kritikpunkt an CRRA-Nutzenfunktionen ist ihre nicht eindeutige Beschränktheit nach oben oder unten woraus sich laut Alpanda und Woglom bei extremen Wahrscheinlichkeitsverteilungen irrationale Entscheidungen ähnlich dem St.-Petersburg-Paradoxon konstruieren lassen (vgl. Alpanda/Woglom 2007, S. 3).

Die Hauptkritik an CRRA-Nutzenfunktionen richtet sich allerdings gegen ihr Unvermögen, die Preise am Kapitalmarkt mit der gleichzeitigen Annahme moderater Risikoaversionen in Einklang zu bringen, was 1985 von Mehra und Prescott nachgewiesen wurde und seitdem unter dem Namen „Equity-Premium-Puzzle“ bekannt ist (vgl. Mehra/Prescott 1985, S. 145-146). In diesem Kontext sollten die Präferenzen der Marktteilnehmer den großen Unterschied zwischen den Renditen unsicherer und sicherer Anlageformen erklären können, was bei CRRA-Nutzenfunktionen nur mit der Annahme ungewöhnlich hoher Risikoaversion möglich ist. Die Untersuchung dieser Problemstellung wird durchgeführt mit einer Nutzenoptimierung über privaten Konsum bei unsicheren Sparmöglichkeiten in einer Ökonomie, die Einkommen ausschließlich aus den Dividenden eines Unternehmens erzielt. Auf Grund ihrer stationären Lösungen für Nutzenoptimierungen, eignet sich der Typ der CRRA-Nutzenfunktion eigentlich besonders gut zu diesem Zweck. Als unsichere Sparmöglichkeit wird in der Analyse ein Aktienportfolio betrachtet. Der Erwartungswert der unsicheren Rendite kann dann näherungsweise mit einer Beziehung zwischen der subjektiven Diskontrate und der Risikoaversion sowie bestimmten stochastischen Momenten aus Portfoliorendite und Wachstumsrate des Konsums gleichgestellt werden. Wenn zum Vergleich dieser Zusammenhang für eine sichere Rendite aufgestellt wird, ergibt sich aus der Differenz der beiden Beziehungen eine Aussage über die Quelle der Überrendite des unsicheren Portfolios. Diese Überrendite ergibt sich demnach allein aus dem Produkt der Risikoaversion und der Kovarianz zwischen Portfoliorendite und Wachstumsrate des Konsums. Wie Untersuchungen auf Basis US-amerikanischer Zahlen für die Zeiträume 1890-1979 und 1979-1999 gezeigt haben, folgt aus den empirischen Aktienrenditen, Überrenditen und Konsumwachstumsraten die Notwendigkeit einer sehr hohen bis extrem hohen Risikoaversion bei privaten Anlegern, wie sie sonst eigentlich weder angenommen noch belegt wurde. Aufgrund dieses Ergebnisses der Nutzenoptimierung aus Konsum bei unsicheren Sparmöglichkeiten, wird die uneingeschränkte Eignung der CRRA-Nutzenfunktion zur Analyse von Nutzenoptimierungen zumindest in Frage gestellt (vgl. Romer 2001, S. 351-353).

2.3 Alternativen zur CRRA-Nutzenfunktion

Schon lange vor der Entdeckung des sogenannten „Equity-Premium-Puzzle“ wurden aufgrund einiger Beobachtungen Alternativen zur CRRA-Nutzenfunktion entwickelt und in makroökonomischen Wachstumsmodellen eingesetzt. Unter anderem befördert durch das hohe Maß an Aufmerksamkeit, das Individuen ihrem gesellschaftlichen Status und dessen Steigerung zukommen lassen, wurde die Festlegung auf den Konsum als alleiniges Fundamentalziel eines Anlegers in Frage gestellt. Unter dem Begriff „Spirit of Capitalism“ wurden Modelle entwickelt, die die menschliche Neigung Kapital anzusammeln in eine Nutzenfunktion einbeziehen. Beispiele für diese Neigung sind das Verhalten sehr reicher Individuen, die bereits ein größeres Vermögen haben, als sie jemals verkonsumieren können und dennoch Anstrengungen und Risiken eingehen um das Vermögen weiter zu vergrößern oder auch das Verhalten von im Ruhestand befindlichen Personen, die zwar keine Nachkommen haben und somit weniger ein Vererbungsmotiv aufweisen als Personen mit Kindern, aber dennoch ihr Vermögen genauso zögerlich entsparen wie diese (vgl. Bakshi/Chen 1996, S. 133-134).

Wenn Vermögen im Sinne eines „Spirit of Capitalism“ in Nutzenfunktionen erfasst wird, ergeben sich daraus eine Reihe von Modellierungsmöglichkeiten, die auf unterschiedliche Effekte abzielen und zu unterschiedlichen Formulierungen für den Nutzen führen. Individuen empfinden es gut, wenn ihr Vermögen steigt und wenn ihr Wohlstand relativ zu dem anderer Leute steigt. Sie sind aber möglicherweise abgeneigt gegen eine allgemeine Steigerung des Wohlstandsniveaus, wenn sie dadurch relativ gesehen verlieren könnten. Zudem reagieren Menschen sensibler auf Veränderungen ihres Wohlstands, wenn ihnen Statusdenken wichtig ist, der allgemeine Lebensstandard bereits hoch ist oder sie selbst eher wenig Vermögen haben. Modelliert werden diese Effekte, indem die normale CRRA-Nutzenfunktion multiplikativ erweitert wird. Hinzu kommen neben dem eigenen Vermögen W und einem Parameter λ der das Statusbewusstsein angibt, je nach Modell noch ein Vergleichsmaßstab V in Form des durchschnittlichen Mittelklassevermögens und ein Faktor κ zur Justierung des Maßstabs gemäß eigener Vorstellungen (vgl. Bakshi/Chen 1996, S. 135-136).

„Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktion mit Status aus absolutem Vermögen W

$$U = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot W^{-\lambda} \quad (2.3.1)$$

„Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktion mit Status aus relativem Vermögen W/V

$$U = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \left(\frac{W}{V}\right)^{-\lambda} \quad (2.3.2)$$

„Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktion mit Übererfüllung eigener Mindestansprüche

$$U = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot (W - \kappa \cdot V)^{-\lambda} \quad \text{nur für } (W - \kappa \cdot V) \text{ mit } W \geq \kappa \cdot V \quad (2.3.3)$$

Der Parameter des Statusbewusstseins λ gibt mit steigendem Betragswert ein höheres Bewusstsein an. In Abhängigkeit von der Größe der Risikoaversion γ wird λ folgendermaßen beschränkt:

$$\lambda \geq 0 \text{ für } \gamma \geq 1 \quad \text{und} \quad \lambda < 0 \text{ für } 0 < \gamma < 1 \quad (2.3.4)$$

Die infolge der Risikoaversion unterschiedlichen Wertebereiche des Nutzens aus Konsum machen diese Differenzierung erforderlich. Bei $0 < \gamma < 1$ und entsprechend positivem Nutzen aus Konsum muss ein steigendes Vermögen einen vergrößernden Einfluss haben, bei $\gamma \geq 1$ und negativem Nutzen aus Konsum muss ein steigendes Vermögen einen betragsmäßig verringenden Einfluss auf den Nutzenwert haben. Die Beschränkung des Parameters λ durch γ gilt für alle drei aufgeführten Nutzenfunktionen gleichermaßen.

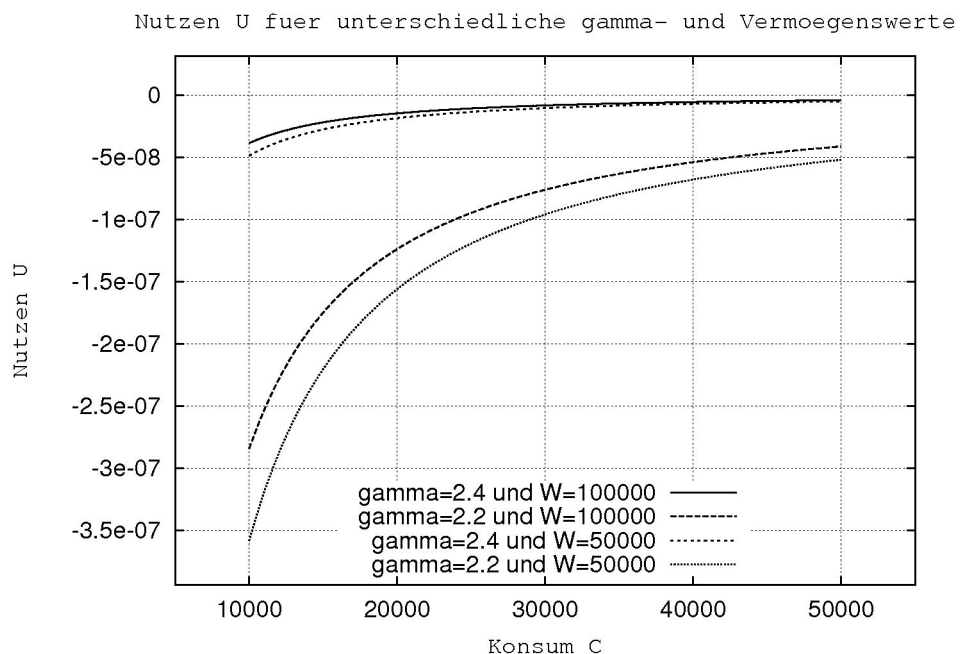


Abbildung 2: $U(C, W)$ von „Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktionen

Zur Demonstration des Funktionsverlaufs wird diejenige Nutzenformulierung herangezogen, die den Status aus absolutem Vermögen einbezieht. Diese Nutzenfunktion wird

später auch in der Vergleichsanalyse eingesetzt, wenn die Auswirkungen auf Entscheidungen untersucht werden. Wissenschaftliche Untersuchungen zu Konsum, Sparen und Kapitalmarktpreisen auf Basis von „Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktionen haben ergeben, dass sowohl die Volatilität der Aktienkurse als auch die ökonomische Wachstumsrate von der Neigung zu Vermögensbesitz beeinflusst und angetrieben werden (vgl. Bakshi/Chen 1996, S. 134).

Mit dem Konzept des „Spirit of Capitalism“ hat ein Aspekt in die Nutzenbewertung Einzug gefunden, der bis dahin noch in keiner Nutzenfunktion berücksichtigt wurde, egal ob sie nun auf Konsum, Vermögen oder Rendite und Volatilität ausgerichtet war. Der soziale Vergleich, der das eigene Nutzenempfinden erhöhen oder vermindern kann, findet sich als neues Element in zwei der drei oben aufgeführten Funktionen wieder. Einmal wird das eigene Vermögen relativiert, bevor es Nutzen stiften kann, das andere mal entsteht Nutzen erst bei Übererfüllung der für das eigene Vermögen gesetzten Mindestansprüche. In beiden Fällen wird der Nutzen somit direkt von externen Größen beeinflusst.

Soziale Interaktionen beeinflussen menschliches Verhalten in vielfältiger Weise (vgl. von Nitzsch 2002, S. 63). Gerade im Bereich Konsum entstehen daraus Emotionen, die in extremer Form als Sozialneid oder in schwächerer Form zumindest als Zwang zum sozialen Schritthalten bezeichnet werden können. Für das Schritthalten wird in der englischsprachigen Literatur gerne die Redewendung „keeping up with the Joneses“ benutzt, wobei Joneses hier schlichtweg der englische Plural des Familiennamen Jones ist. Der Konsum anderer Individuen kann somit zum Maßstab eigenen Wohlbefindens werden und als Externalität in die Entscheidungsfindung mit einfließen. Um diese Effekte in ökonomischen Modellen zu berücksichtigen, wurden verschiedene Varianten von „Consumption Externality“-Nutzenfunktionen entwickelt. Als Ergebnis diverser Untersuchungen kann festgehalten werden, dass die Berücksichtigung von „Consumption Externalities“ in Nutzenfunktionen den gleichen Effekt hat wie eine Erhöhung der Risikoaversion in CRRA-Nutzenfunktionen. Somit wird die extreme Erhöhung der Risikoaversion, wie sie im Zusammenhang mit dem „Equity-Premium-Puzzle“ bekannt ist, überflüssig, der Konkurrenzgedanke im Konsumverhalten sorgt bereits für das Verlangen nach höheren unsicheren Renditen. Die Relativierung des eigenen Konsums mit Bezug auf das Konsumverhalten anderer Personen beeinflusst also auch die Preisfindung am Kapitalmarkt und die nutzenoptimalen Sparscheidungen eines Individuums (vgl. Liu/Turnovsky 2002, S. 1-3). Aus diesem Grund ist es von Interesse die Spar- und An-

lageentscheidungen gemäß einer „Consumption Externality“-Nutzenfunktion mit denen anderen Nutzenfunktionen zu vergleichen (vgl. Liu/Turnovsky 2002, S. 17).

„Consumption Externality“-Nutzenfunktion

$$U = \frac{(C_{\text{individuell}} \cdot C_{\text{extern}}^{-\kappa})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (2.3.5)$$

Liu und Turnovsky bezeichnen κ als eine Art Neidparameter und beschränken ihn lediglich nach unten mit $0 < \kappa$. Li und Yin begrenzen den Einfluss der Konsumexternalitäten in ihrer Arbeit auf $0 < \kappa < 1$ (vgl. Li/Yin 2004, S. 18). Das κ der „Consumption Externality“-Nutzenfunktion entspricht nicht dem κ der „Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktion mit Übererfüllung. Li und Yin liefern mit ihrer Analyse des Konjunkturkreislaufs unter Annahme von „Consumption Externality“-Präferenzen für private Investoren ein Beispiel für die Validität dieses Ansatzes. Unter Einbeziehung von Externalitäten für Konsum und Produktion haben sie eine Modellvariante entwickelt, die den seit den späten 80er Jahren in den USA erkennbaren Trend zu längeren Boomphasen und kürzeren Rezessionen bei insgesamt gleicher Wellenlänge der Konjunkturzyklen erklären kann (vgl. Li/Yin 2004, S. 34).

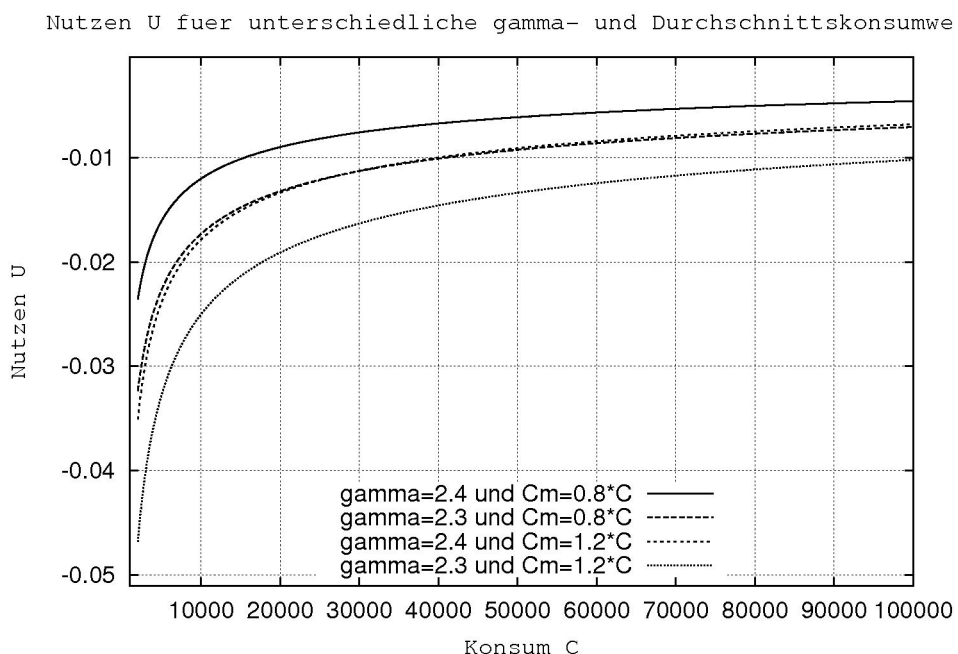


Abbildung 3: $U(C_{\text{ind}}, C_{\text{ext}}=C_m)$ von „Consumption Externality“-Nutzenfunktionen

In einem Vergleich mehrerer Arten von Nutzenfunktionen, die in einem Modell mit US-amerikanischen Daten die Preise am Aktienmarkt errechnen sollten, haben die „Spirit of

Capitalism“- und „Consumption Externality“-Nutzenfunktionen bei vierteljährlichen Betrachtungen überdurchschnittlich gut abgeschlossen. Sie haben dabei auch stets bessere Werte im Sinne kleinerer Fehler erreicht, als eine unmodifizierte CRRA-Nutzenfunktion. Auf der Grundlage jährlicher Daten mussten sie allerdings den rekursiven Nutzenfunktionen, wie sie von Epstein und Zin sowie von Weil entwickelt wurden, stets den ersten Platz für die geringsten Abweichungen überlassen (vgl. Hammami 2007, S. 29-35).

Wie bislang dargestellt, wird der externe Konsum als feste Größe in die Nutzenfunktionen einbezogen, sein Wert ist dabei nicht konstant sondern kann von Jahr zu Jahr schwanken und sich obendrein tendenziell verändern. Auch um die Parameter der Nutzenfunktionen kreisen Überlegungen, inwiefern diese konstant sind oder zeitlich veränderlich und damit letztlich sogar eher als Variable denn als Parameter einzustufen sind (vgl. Georgiev 2004b, S. 21). Einen Schritt in diese Richtung hat van den Heuvel mit seinem Entwurf einer temporalen Risikoaversion unternommen (vgl. van den Heuvel 2008, S. 2-3). Er sieht keinen Grund dafür, warum Individuen sich nicht Gedanken über die zeitliche Komponente des Risikos machen sollten. Van den Heuvel untermauert seine Sichtweise mit der Annahme, dass Individuen Störungen mit permanenten Auswirkungen negativer bewerten als unkorrelierte Schwankungen, die sich möglicherweise kurzfristig wieder ausgleichen können.

Um nun unterschiedliche Empfindungen bezüglich kurzfristiger und langfristiger Risiken in einer Formulierung erfassen zu können, hebt van den Heuvel die periodenbezogene Nutzenermittlung auf. Nutzen wird sodann stets als Gesamtnutzen betrachtet, der sich aus dem Konsum der jetzigen und aller folgenden Perioden ergibt (vgl. van den Heuvel 2008, S. 5). Ferner wird die Risikoaversion für kurzfristige und langfristige Zeithorizonte separat modelliert. Somit ist auch die Elastizität der intertemporalen Substitution nicht mehr fest als Inverse an eine Risikoaversion gekoppelt.

„Temporal Risk Aversion“-Nutzenfunktion, im allgemeinen mit $\alpha > \gamma$

$$U_t = \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{t=0}^T \beta^t C_t^{1-\gamma} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}} \quad (2.3.6)$$

Die Verwandtschaft dieser Formel mit der klassischen CRRA-Nutzenfunktion ist augenscheinlich, für $\alpha = \gamma$ lässt sie sich mit Zeithorizont $T = 0$ zudem direkt darin überführen. Wie aus der prinzipiellen Annahme zur „Temporal Risk Aversion“ hervorgeht, soll α als langfristige Risikoaversion stets größer als die normale oder nunmehr als kurzfris-

tig zu bezeichnende Risikoaversion γ sein. Aufgrund des mehrere Perioden umfassenden Betrachtungszeitraums ist für die „Temporal Risk Aversion“-Nutzenfunktion, im Gegensatz zu den vorherigen Nutzenfunktionen, eine Indizierung der Zeit t in der Gleichung erforderlich.

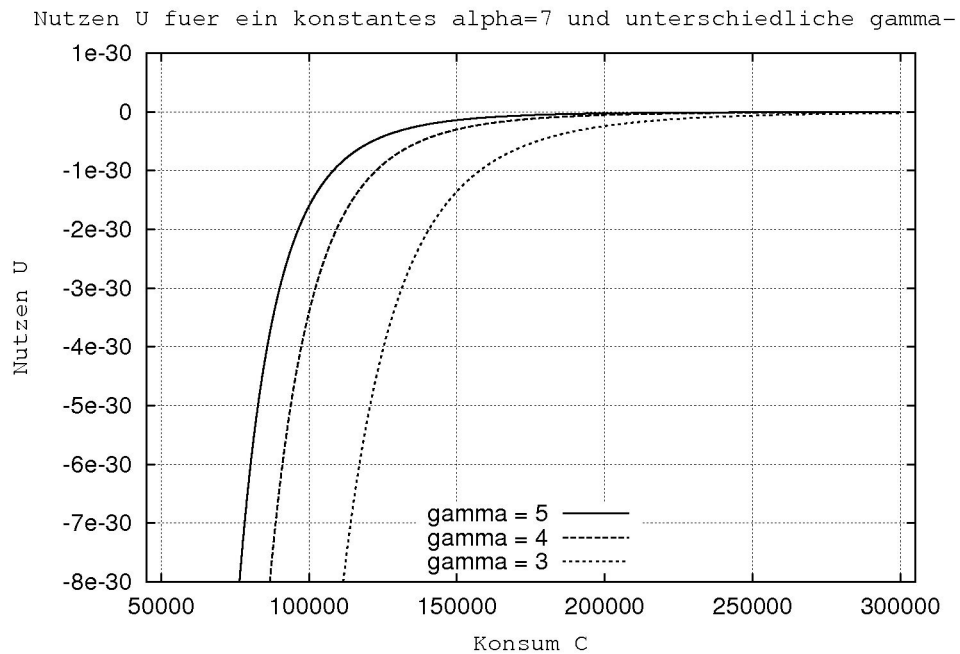


Abbildung 4: $U(C, \gamma)$ von TRA-Nutzenfunktionen mit variablem γ

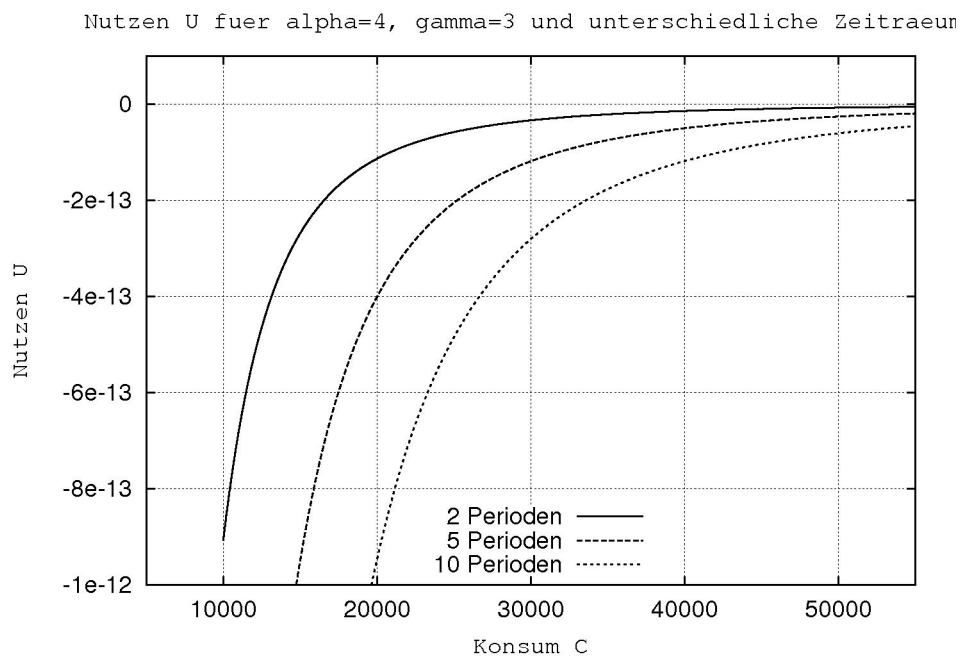


Abbildung 5: $U(C, T)$ von TRA-Nutzenfunktionen mit variierten Laufzeiten T

Die von van den Heuvel vorgestellte Nutzenfunktion entspricht prinzipiell allen Anforderungen der Entscheidungslehre, durch die Aufhebung des zeitlich getrennten Periodenbezugs ergeben sich im Optimierungsrechengang jedoch einige Veränderungen gegenüber den anderen Nutzenfunktionen.

Eine tief greifende Weiterentwicklung der Nutzenfunktionen mit konstanter Risikoaversion wurde Ende der 80er Jahre parallel von Epstein und Zin sowie von Weil ausgearbeitet. In der neuen Art der Nutzenbestimmung wird die vorausschauende Haltung risikoaverser Investoren durch eine rekursive Formulierung berücksichtigt, die den Nutzen der Folgejahre explizit in den aktuellen Nutzen einbezieht. Für unsicheren zukünftigen Nutzen fließen dessen Erwartungswerte in die Gleichung ein. Durch Rekursion und sukzessive Formulierung der erforderlichen Rechenoperationen wird erreicht, dass die Elastizität der intertemporalen Substitution von der Risikoaversion entkoppelt wird und eigenständig modelliert werden kann. Durch diese Trennung ist es auch möglich, den Nutzen aus sicherem zukünftigem Konsum unabhängig von einer Aussage über die Risikoaversion eines Individuums zu bestimmen, da bei sicheren Erwartungen der Parameter der Risikoaversion aus der Nutzenfunktion entfällt (vgl. Epstein/Zin 1991, S. 2-3). Im folgenden wird die rekursive Nutzenfunktion nach Epstein-Zin in der Notation von Campbell und Viceira angegeben und für Berechnungen genutzt (vgl. Campbell/Viceira 2002, S. 43).

rekursive Nutzenfunktion nach Epstein-Zin in einer Campell-Viceira-Form

$$U_t = \left[(1-\beta) C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \beta \left(E_t [U_{t+1}^{1-\gamma}] \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \quad (2.3.7)$$

Die rekursive Nutzenfunktion erfreut sich großer Beachtung in der Literatur, insbesondere aufgrund der von ihr gebotenen eigenständigen Modellierung der EIS. Diese stellt an sich schon ein eigenes Forschungsgebiet dar. Aus den zahlreichen Untersuchungen dazu lassen sich denn auch zwei simple Aussagen herausziehen. Es besteht keinesfalls Einigkeit über eine bestimmte betragsmäßige Größe der EIS. Diese wird je nach Untersuchungsgegenstand und Methode im allgemeinen auf Werte zwischen 0 und 2 geschätzt (vgl. Blackburn 2008, S. 36), kann aber bei isolierten Betrachtungen noch höher liegen (vgl. Crossley/Low 2006, S. 9). Die EIS wird auf jeden Fall als eigenständige Größe gesehen, die unabhängig von der Risikoaversion eine Modellierung maßgeblich beeinflussen kann und für die Analyse von Kapitalmarktpreisen eine größere Bedeutung als die Risikoaversion aufweist (vgl. Georgiev 2004b, S. 21). Wie schon zuvor für die Risikoaversion mit der Nutzenfunktion der temporalen Risikoaversion gezeigt, bestehen

auch für die EIS Tendenzen, diese als zeitlich oder saisonal variabel anzusehen, was mit einer rekursiven Nutzenfunktion ohne weiteres umgesetzt werden kann.

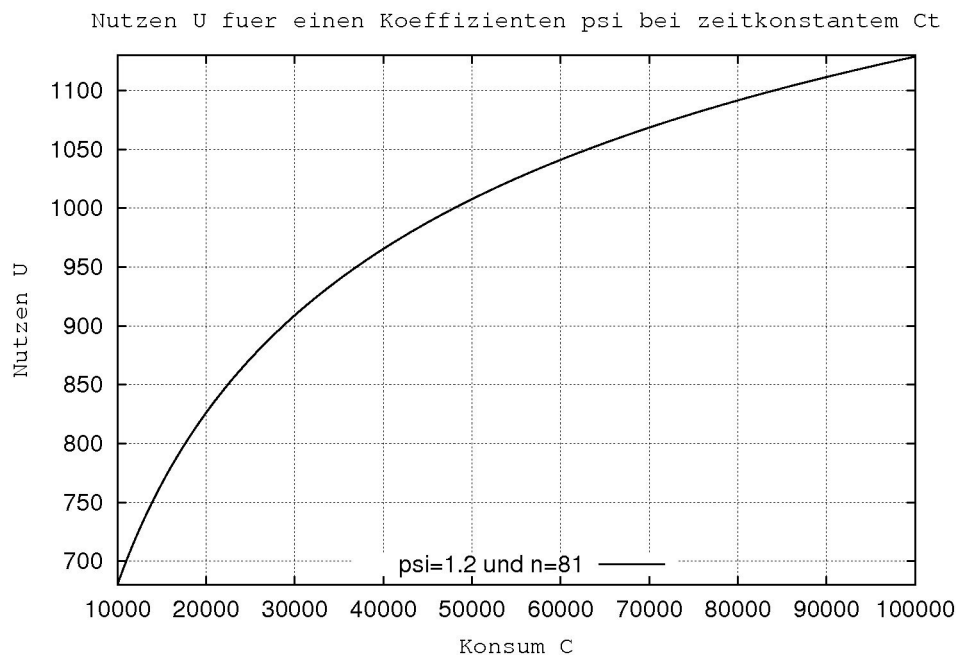


Abbildung 6: $U(C)$ von rekursiven Nutzenfunktionen nach Epstein-Zin

Abschließend bleibt festzuhalten, dass Nutzenfunktionen durchaus parametersensibel sind, wie anhand divergierender Forschungsergebnisse und aus den Grafiken in diesem und dem folgenden Kapitel erkennbar wird. Eine Untersuchung der Auswirkungen verschiedenartiger Nutzenfunktionen ohne eine tiefer gehende Betrachtung einzelner Parameter ist daher primär als eine qualitative Analyse anzusehen. Für stichhaltige quantitative Aussagen wären weitreichende Vergleichsrechnungen mit aufgefächerten Parametervariationen erforderlich.

3 Das Lebenszyklusmodell

3.1 Entscheidungen im intertemporalen Kontext

Schematisch gedacht durchlebt ein Mensch in der Spanne zwischen Geburt und Tod lediglich die Phasen Heranwachsen, Erwerbstätigkeit und Ruhestand. Da das ökonomische Interesse vor allem den menschlichen Aktivitäten bezüglich Einkommen, Konsum und Kapitalanlage gilt, liegt der Startpunkt von Lebenszyklusbetrachtungen am Anfang der Erwerbstätigkeit, mit der gleichsam der Bezug von Erwerbseinkommen und der Beginn eigenständigen finanziellen Handelns verbunden sind. Den Endpunkt der Betrachtungen bildet der Tod. Motiviert wird die Untersuchung des Lebenszyklus zum einen

durch die Notwendigkeit, den Lebensunterhalt in der Phase des Ruhestands zu finanzieren. Schließlich wird der Konsum auch nach dem Ende der Erwerbstätigkeit fortgesetzt. Zum anderen haben der Konsum und die Bildung von Ersparnissen einen so großen Einfluss auf die Entwicklung der Gesamtwirtschaft, dass Faktoren wie Staatsausgaben, technischer Fortschritt und Geldpolitik ohne sie nicht umfassend analysiert werden können (vgl. Romer 2001, S. 330).

Ein erster Unterschied zwischen der Realität und einem Lebenszyklusmodell ist an dieser Stelle bereits erkennbar. Die Phase des Heranwachsens wird im Modell nicht erfasst. Dies ist weniger eine Missachtung denn vielmehr eine Konzentration der Modellierung auf die als wichtig erachteten Zusammenhänge. Obwohl das Heranwachsen nicht als zeitliche Phase berücksichtigt wird, so spielt es im Modell dennoch durch zwei entscheidende Punkte eine wichtige Rolle. Beide sind mit dem Thema Bildung verbunden. Da Bildung zum einen ein zeitaufwendiger Prozess ist, verzögert sich durch ein höheres Maß an Bildung der Eintritt ins Erwerbsleben, was möglicherweise mit einer Verkürzung der Erwerbsphase verbunden ist. Zum anderen ist das Erwerbseinkommen mit der vor Erwerbsbeginn verbundenen Bildung verknüpft, eine höhere Bildung führt empirisch zu einem wesentlich höheren Einkommensniveau (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 499).

Um optimale Spar- und Anlageentscheidungen im Lebenszyklus bestimmen zu können, werden zunächst die Struktur und die Einflussgrößen des Problems definiert. Die Optimierung des Erwartungsnutzens bildet dabei das Rückgrat des stets mehrere Perioden umfassenden Modells. Dementsprechend beruht der zu maximierende Gesamtnutzen auf Werten aller im System berücksichtigten Perioden. Die primär zur Nutzenbestimmung maßgebliche Einflussgröße ist dabei immer der Konsum. Eine Standardformulierung der Optimierung des Erwartungsnutzens für periodisch voneinander unabhängige Nutzenwerte lautet wie folgt (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 122).

$$\max_{c, \alpha} E_0 \left[\int_0^{\infty} U(C, t) dt \right] \quad (3.1.1)$$

In detaillierteren Formulierungen summiert sich der zu optimierende Gesamtnutzen aus zeitlich abdiskontierten Periodenwerten, die entweder eigenständig sind oder in einem rekursiven Zusammenhang miteinander stehen können. Eine weitere Einflussgröße des Modells ist somit der Diskontfaktor. Ferner beeinflusst die abnehmende Überlebenswahrscheinlichkeit von Periode zu Periode den Erwartungswert. Ein in der Zukunft möglicherweise erreichbarer Periodennutzen fließt dadurch nur verringert in den Ge-

samtnutzen ein. Diskontfaktor und Überlebenswahrscheinlichkeit sind beide wiederum mit der Dimension Zeit verbunden, die im Modell allerdings eher als Laufvariable denn als Einflussgröße anzusehen ist. In der nachfolgenden Formulierung entspricht die Zählvariable j der hier periodisch voranschreitenden Dimension Zeit (vgl. Ljungqvist/Sargent 2004, S. 393).

$$\max E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \cdot p_{j, j+1} \cdot u(c_{t+j}) \quad (3.1.2)$$

Auch Gleichung (3.1.2) kann noch erweitert werden, wenn neben dem Nutzen aus Konsum noch ein Vererbungsnutzen berücksichtigt werden soll, was in der Literatur durchaus geläufig ist (vgl. Merton 1997, S. 101), in der hier vorgelegten Arbeit aber nicht weiter verfolgt wird. Weitere Einflussgrößen für das Entscheidungsproblem sind die zur Verfügung stehenden finanziellen Mittel und ihre im hier verwendeten Lebenszyklusmodell als exogen angenommenen Veränderungsrate, als da wären das Vermögen, die Kapitalrenditen aus sicheren und unsicheren Anlagen sowie das Arbeitseinkommen (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 495). Aufgrund umfangreicherer Gestaltungsmöglichkeiten bei der Modellierung dieser Größen, wird den Kapitalrenditen ein eigenes Unterkapitel 3.4 und dem Arbeitseinkommen ein Unterkapitel 3.5 gewidmet.

Eine intertemporale Nutzenoptimierung stellt ein Gleichgewicht zwischen heute und allen zukünftigen Perioden her. Konsum, auf den heute verzichtet wird, lässt sich durch Sparen auf andere Perioden übertragen (vgl. Romer 2001, S. 333). Der Konsumverzicht wird im Modell als Sparquote ausgedrückt. Diese Sparquote kann sowohl auf das Vermögen zu Periodenbeginn als auch auf das Einkommen in einer Periode bezogen werden. In Modellierungen sind folglich die unterschiedlichen Aussagen zu berücksichtigen. Da Sparen eng mit Konsum verbunden ist, können beide Größen quasi nur in Abhängigkeit voneinander variiert werden.

Um das Problem intertemporaler Nutzenoptimierung aus Konsum zu veranschaulichen wird zunächst ein relativ simples Modell vorgeführt: Untersuchungsgegenstand ist die optimale aktuell zu verzehrende Konsummenge, unter der Annahme, dass insgesamt nur eine begrenzte Zahl an Konsumeinheiten zur Verfügung steht. Problem ist die nutzenoptimale Allokation der Konsumeinheiten auf die heutige und alle in Frage kommenden Folgeperioden. Wenn zehn Konsumeinheiten zur Verfügung stehen, kommen aufgrund der prinzipiell anzunehmenden Präferenz für baldigen Konsum gegenüber verzögertem Konsum neben der heutigen Periode folglich nur noch maximal neun weitere in Be-

tracht. Die Zeitpräferenz für baldigen Konsum wird im Modell mit einem Diskontfaktor ausgedrückt.

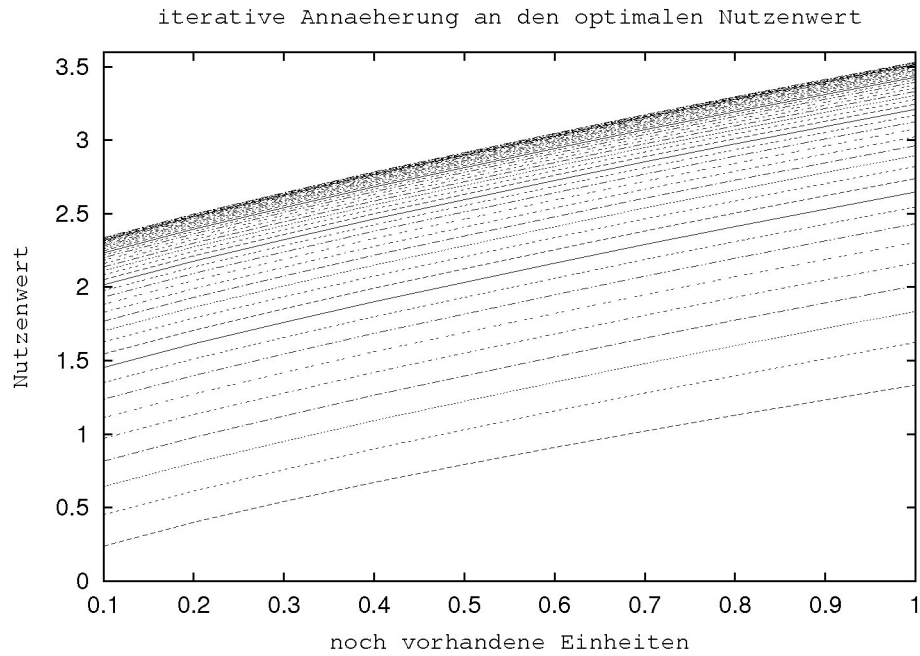


Abbildung 7: Iteration der optimalen Lösung mit $\gamma=0,25$ und $\beta=0,9$

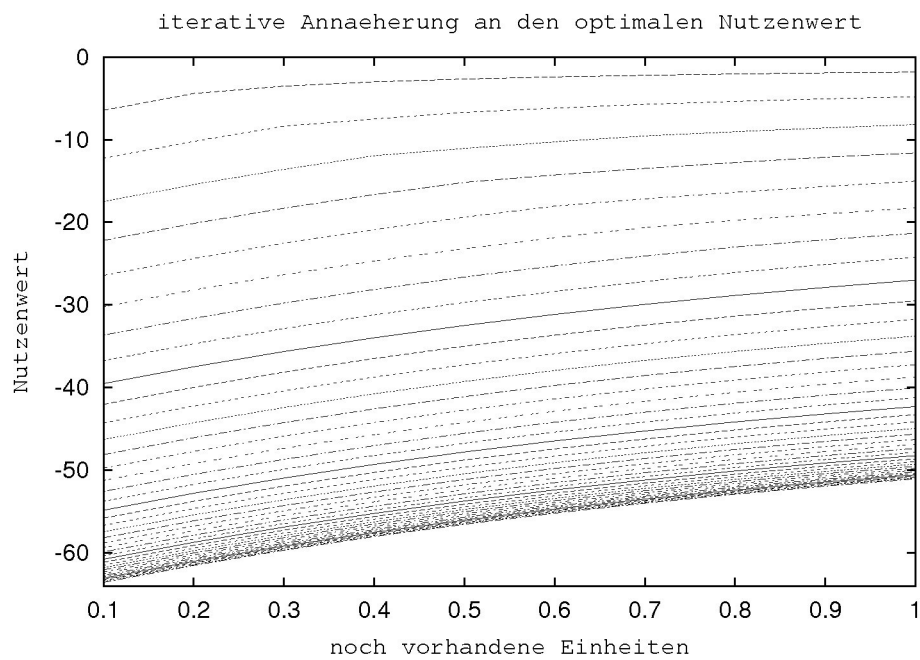


Abbildung 8: Iteration der optimalen Lösung mit $\gamma=1,55$ und $\beta=0,9$

Die präsentierten Ergebnisse beruhen auch recht groben Parameterwerten, so wird die Diskretisierung in nur zehn Konsumeinheiten und der Zeitdiskontfaktor mit dem Wert 0,9 modelliert. Die einzige Quelle für Unterschiede in den Ergebnissen ist die Variation der Risikoaversion. Die verhältnismäßig hohe Abdiskontierung des zukünftigen Nutzens verstärkt dabei die Unterschiede zwischen den Resultaten aus niedriger und hoher Risikoaversion.

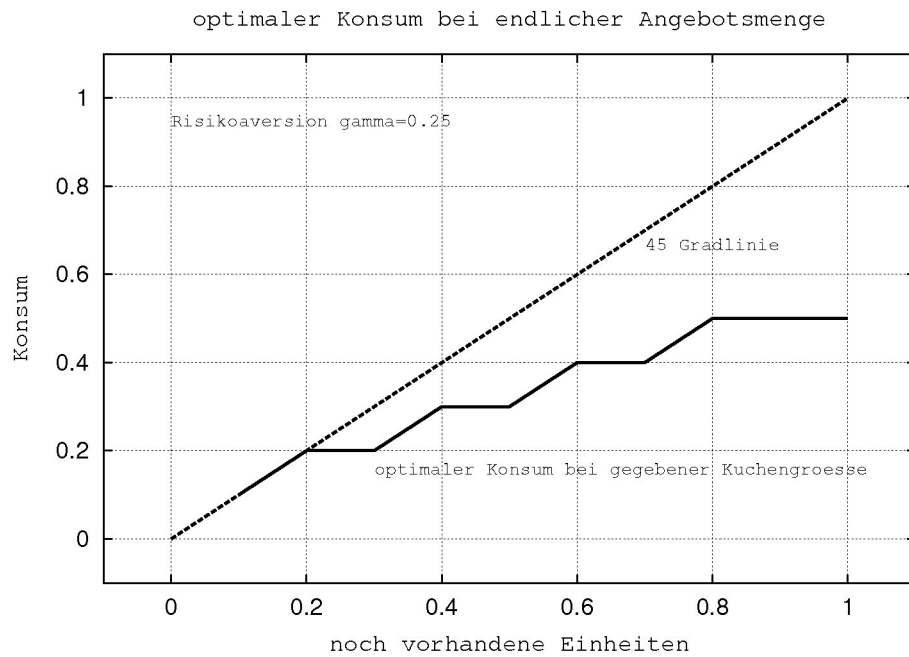


Abbildung 9: Optimaler Konsum für $\gamma=0,25$ und $\beta=0,9$

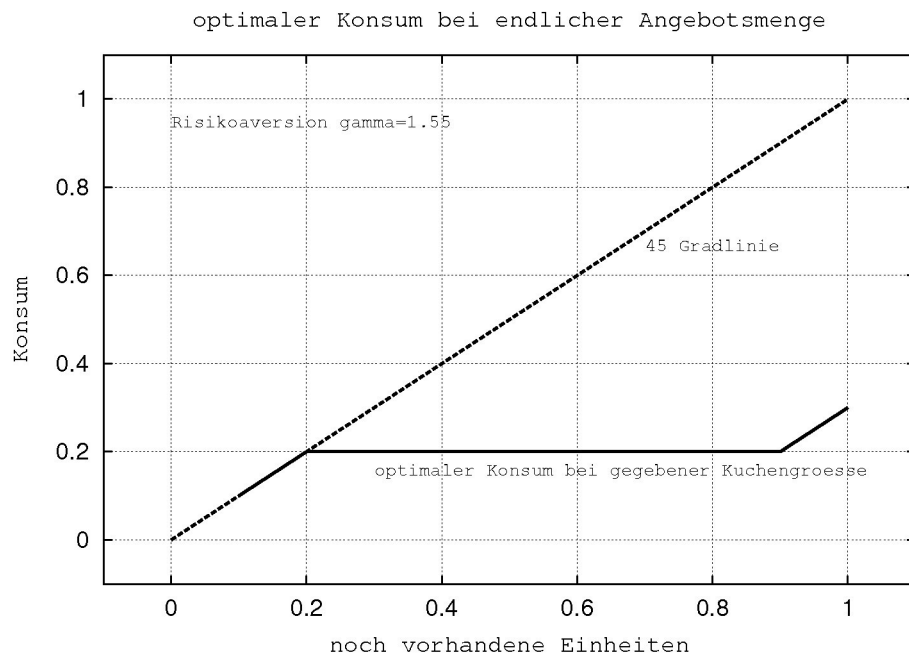


Abbildung 10: Optimaler Konsum für $\gamma=1,55$ und $\beta=0,9$

Anschaulich stellt das Modell die Verteilung eines bereits in eine bestimmte Anzahl von Stücken zerteilten Kuchen auf eine Abfolge von Perioden dar. Zur Nutzenermittlung wird eine CRRA-Nutzenfunktion eingesetzt. Der Parameter der Risikoaversion kann individuell vorgegeben werden. Variationen dieser Modellierung können zusätzlich eine Abschreibung auf die gerade noch vorhandenen Konsumeinheiten enthalten oder einen zufälligen Störterm in der Nutzenfunktion ergänzen, was einer von Periode zu Periode schwankenden Lust auf Konsum entsprechen soll (vgl. Adda 2003, S. 10-14). Ferner könnte die oben erwähnte Überlebenswahrscheinlichkeit in eine Berechnung des erwarteten Gesamtnutzens integriert werden.

Die dargestellten Berechnungsergebnisse bestätigen die natürliche Intuition, dass mit ansteigender Risikoaversion der Konsum zu Beginn, wenn noch die volle Menge an Einheiten zur Verfügung steht, stärker eingeschränkt wird. Ein nahezu risikoneutraler Konsument mit sehr niedriger Risikoaversion schöpft dagegen zunächst aus dem Vollen und reduziert seinen Konsum erst sukzessive. Mit hoher Risikoaversion wird der insgesamt mögliche Konsum somit auf mehr Perioden verteilt, was durch eine Analyse des Konsumpfads nachvollzogen werden kann.

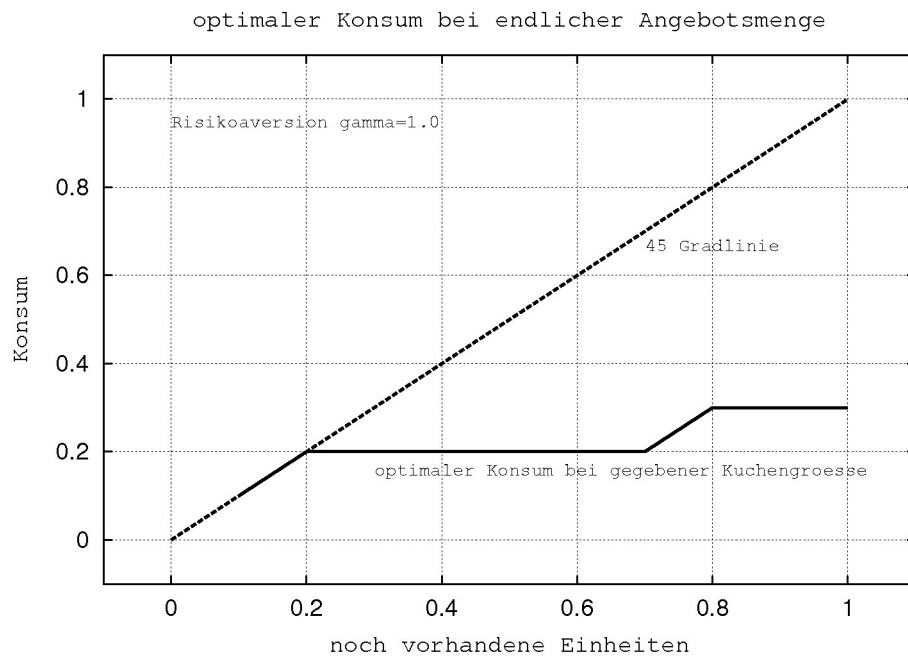


Abbildung 11: Optimaler Konsum für $\gamma=1,00$ und $\beta=0,9$

Der Pfad des optimalen Konsums ist nicht direkt angegeben, kann aber aus der Grafik abgelesen werden. Für die Nutzenfunktion mit $\gamma=1$ beginnt der Pfad mit der Ausgangsgröße 1,0, darauf folgt der erste Konsumschritt mit 0,3 Einheiten, somit ergibt sich für

die Folgeperiode die Größe 0,7, bei der ein Konsumschritt von 0,2 optimal ist was für die nächste Periode einen Anfangswert von 0,5 vorgibt und immer so weiter, bis in diesem Fall der letzte Konsumschritt von 0,1 zur Endgröße 0 führt. Es erscheint auffällig, dass der optimale Konsum soweit möglich immer mindestens doppelt so groß wie das Inkrement der Diskretisierung ist. Aufgrund der Abdiskontierung des zukünftigen Nutzens wäre eine vorzeitige Halbierung oder gar Drittelung des Bestands jedoch nie sinnvoll. Die Modellierung liefert hier plausible Ergebnisse. Und ohne Abdiskontierung würde für das Problem keine eindeutige Lösung bestehen.

In den Grafiken, die den Iterationsverlauf des optimalen Nutzens veranschaulichen, werden bei einer Risikoaversion größer oder gleich 1,0 negative Nutzenwerte dargestellt, so wie sich die Werte aus der Nutzenfunktion ergeben. Da der Nutzen in der Iteration additiv ermittelt wird, sinken die Nutzenkurven daher ab, bis das optimale Nutzenniveau erreicht ist. Das erscheint möglicherweise irritierend, liegt aber daran, dass die Bestimmung der optimalen Lösung durch eine Iteration, in diesem Fall rückwärts laufend, erfolgt (vgl. Adda 2003, S. 10).

Aus dem gezeigten Beispiel ist ersichtlich, dass bei einer Betrachtung, die sich nicht nur auf einen Endwert richtet sondern auch mehrere Werte an Zwischenpunkten berücksichtigt, ein pfadabhängiges Problem vorliegt (vgl. Glasserman 2003, S. 7-8). Ferner wird deutlich, dass unterschiedliche Nutzenberechnungen zu unterschiedlichen optimalen Lösungen führen. Allerdings ergeben sich die Unterschiede hier bereits durch eine Variation eines Parameters bei ein und derselben Nutzenfunktion. Wenn später in einem wesentlich komplexeren Modell unterschiedliche Nutzenfunktionen mit den in Unterkapitel 2.3 beschriebenen Parametern eingesetzt werden, können unterschiedliche Ergebnisse sich auch schon daraus ergeben, dass Parameter nicht kongruent aufeinander abgestimmt sind. Zuvor lohnt es sich noch einige ebenso theoretische wie praktische Zusammenhänge optimaler Spar- und Anlageentscheidungen zu beleuchten.

3.2 Einflüsse auf rationale Sparentscheidungen

Rund um Entscheidungen zu Vermögensaufbau und Vermögensverwaltung bestehen durchaus Unterschiede zwischen rationalen Entscheidungen und emotionalen Entscheidungen. Zudem kann ein Mangel an Informationen selbst bei Menschen mit klar definierten Zielen dazu führen, dass Entscheidungen nicht entsprechend der Ziele rational getroffen werden. Die Erforschung rationaler Entscheidungen ist dennoch prinzipiell richtig, da rationale Entscheidungen in vielen Situationen effizientere Wege zum Erreichen der Ziele aufzeigen (vgl. Champernowne 1969, S. 41). Andererseits wird auch die

Aussagekraft einer rationalen Lösung durch die angenommenen Randbedingungen bestimmt. Wenn in einer unsicheren Umgebung eine zeitlich konstante Wahrscheinlichkeitsverteilung der erwarteten Renditen angenommen wird und ein Individuum eine additive Nutzenfunktion präferiert, führt eine analytische Herangehensweise zu einem vermögensunabhängigen stationären α als Anteil des riskanten Portfoliovermögens (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 33) Diese theoretische Lösung bestätigt zum einen die natürliche Vorsicht, Risiken zu diversifizieren und eben nicht alle Eier in einen Korb zu legen, zum anderen ergibt sich daraus ein Hinweis für die nachfolgenden numerischen Untersuchungen.

Die Präferenzen eines Individuums beinhalten auch Aussagen über die bevorzugte Konsumverteilung zwischen mehreren Perioden, daher ist eine intertemporale Portfoliooptimierung auf Basis des Erwartungsnutzens untrennbar mit dem individuellen Spar- und Konsumverhalten verbunden. Somit ist relevant, wie optimale Sparentscheidungen von Unsicherheit beeinflusst werden (vgl. Bicksler 1974, S. 5).

Die Anwesenheit von Risiko kann Entscheidungen, auch zum Sparen, in vielfältiger Weise beeinflussen. Auf der einen Seite kann Risiko die Sparneigung verringern, weil durch Risiko die Gefahr besteht, dass Ersparnisse an Wert verlieren und ein Individuum dadurch um die Früchte seiner Arbeit gebracht wird. Andererseits kann Risiko ein Anreiz zum Sparen sein, wenn etwa das Arbeitseinkommen unsicher ist, es hohen Schwankungen unterliegt oder das prinzipielle Risiko besteht länger zu leben als arbeiten zu können. Die formalen Ergebnisse zum Umgang mit Risiken bei Sparentscheidungen sind erfrischend abwechslungsreich gegenüber der allgemeinen Sichtweise. Generell gültige Verallgemeinerungen zu den Auswirkungen von Risiko auf Sparentscheidungen können daher nur eingeschränkt getroffen werden. Grundsätzlich gilt aber, dass Risiko, welches den erwarteten zukünftigen Grenznutzen verkleinert, Sparen uninteressant macht. Andererseits treibt Risiko, das zu einer Steigerung des erwarteten Grenznutzen führt, zum Sparen an (vgl. Champnowne 1969, S. 42-43).

Risiken die sich negativ auf die Rentabilität heutiger Kapitalanlagen auswirken sind kein Anreiz zum Sparen. Aber da sich dadurch der Erwartungsnutzen für zukünftige Perioden verkleinert, kann der Grenznutzen aus Konsum in diesen Perioden ansteigen und dadurch zum Sparen animieren. Aufgrund dieser gegensätzlichen Wirkung ist es schwer zu sagen, welche Auswirkungen Veränderungen in der Risikoerwartung auf rationale Entscheidungen haben. Es ist anzunehmen, dass die Möglichkeit, die kompletten Ersparnisse zu verlieren, unter allen vorstellbaren Annahmen dem Sparen entgegensteht.

Andererseits ist eine hohe Unsicherheit bezüglich der Anlagerendite, also eine hohe erwartete Volatilität, unter vielen Umständen eher eine Motivationshilfe für höhere aktuelle Sparbemühungen. Wieso mehr gespart werden sollte, wenn die Rendite volatiler ist, liegt am Einfluss dieser Volatilität auf den Erwartungswert des zukünftigen Grenznutzens des Einkommens (vgl. Champernowne 1969, S. 43).

Champernowne hat mit einer Reihe analytischer Untersuchungen unter Annahme passender Vereinfachungen Ergebnisse zu den Effekten verschiedener Formen des Risikos im Zusammenhang mit Sparscheidungen erarbeitet (vgl. Champernowne 1969, S. 42-49). Nur leichte Variationen der Annahmen, wo und in welcher Form Risiko auftritt, führen zu deutlichen und teils gegensätzlichen Aussagen über den Kern seiner Untersuchungen, nämlich über die Sparneigung.

Wenn der genaue Todeszeitpunkt eines Individuums unbekannt ist, kann diese Unsicherheit durch Annahmen zu diesem Umstand als Risiko in einem Modell berücksichtigt werden. Angenommen ein Individuum rechnet mit dem eigenen Tod in einem bestimmten Zeitintervall nach dem Ende seiner Berufstätigkeit und somit nach dem Ende des Bezugs eines regelmäßigen Einkommens und vergibt für den Todeszeitpunkt eine uniform Wahrscheinlichkeit über das Intervall, dann kann eine Analyse vergleichen, wie Sparscheidungen im Fall des unbekanntes Todes und im Fall des sicheren Todes am Erwartungswert der uniformen Wahrscheinlichkeit ausfallen. Das Ergebnis sagt, dass die Unklarheit über den Tod bei uniformer Wahrscheinlichkeit zu niedrigerem Konsum und somit höheren Ersparnissen zu Beginn der Lebenszeit führen, als wenn der Erwartungswert als sicherer Zeitpunkt angenommen wird, sofern das Individuum nicht riskoneutral sondern risikoavers ist und keine Möglichkeit zum Tausch seiner Ersparnisse am Ende des Arbeitslebens gegen lebenslange Annuitäten hat. Wenn ein Individuum dieses Risiko aber auf eine Lebensversicherung übertragen kann, die ab dem Ende des Bezugs von Arbeitseinkommen mit der Auszahlung von zeitlich unbegrenzten Annuitäten beginnt, so kann er mit geringeren Sparbemühungen seine Ersparnisse aufbauen und diese zum Ende seines Arbeitseinkommens gegen das Recht auf Annuitäten eintauschen.

Wenn die Höhe der Rendite auf die Ersparnisse ungewiss ist, können dazu drei unterschiedliche Fallannahmen modelliert werden. Wenn das Sparvermögen aus irgendwelchen Gründen verloren geht und keine Zahlungen mehr an den Sparer leisten kann und wenn das Risiko dafür als konstant in allen Perioden angesehen werden kann, dann ist unter der Annahme vernachlässigbarer Varianz der Effekt auf die Sparrendite lediglich

eine Verringerung um einen konstanten Betrag. Im Ergebnis führt dies zu höherem anfänglichen Konsum und einer geringeren Sparneigung, quasi warum auch, wenn relativ sicher ist, dass es weniger Rendite gibt. Später wird dann etwas mehr gespart, um insgesamt die Altersruhe finanzieren zu können. Eine niedrigere zu erwartende Sparrendite beschränkt also auch die Bereitschaft, Konsum zwischen mehreren Perioden zu vertauschen.

Wenn die Varianz nicht vernachlässigt werden kann, also das Risiko offen bleibt, unterscheidet Champernowne zwei Fälle, zum einen, wenn das Risiko des Kapitalverlusts auf den Betrachtungszeitraum gleichmäßig verteilt werden kann und die Normalrendite nur um einen konstanten Betrag vermindert wird, zum anderen, wenn das Risiko nicht verteilt werden kann und in jeder Periode ein Totalverlust eintreten kann. Im ersten Fall führt ein Anstieg der normalen Sparrendite oder eine steigende Lebenserwartung zu einer höheren Sparquote. Demgegenüber wird im zweiten Fall durch das singuläre Katastrophenrisiko die anfängliche Sparneigung gedämpft, die Aussicht auf einen Totalverlust der Ersparnisse fördert also den heutigen Konsum. Wenn nicht der Kapitalverlust als solches betrachtet wird, sondern die Schwankung der erwarteten Rendite, dann kann dafür gezeigt werden, dass die Konsumneigung zu Beginn sinkt und die Sparquote steigt. Diese Art von Risiko führt also zu einem genau gegensätzlichen Ergebnis als das vorher betrachtete (vgl. Champernowne 1969, S. 42-49).

Alle Fallbeispiele haben gemeinsam, dass ein Individuum zur Optimierung seines Nutzens einen zeitlich möglichst konstanten Grenznutzen anstrebt, wobei dieses Gleichgewicht eine Abdiskontierung der zukünftigen Werte voraussetzt. Rationale Spar- und Konsumentscheidungen beinhalten darüber hinaus noch ein anderes Gleichgewicht, das ebenfalls an einer Periodenschnittstelle angesiedelt ist. Der Zusammenhang zwischen heutigem Vermögen, heutigem Konsum und morgigem Vermögen ist unter Annahme aller relevanten Einflüsse ebenfalls adäquat zu modellieren. Einige gängige Varianten werden im folgenden Unterkapitel skizziert.

3.3 Budgetbeschränkungen und Konsumhypothesen

Um einen Überblick über die Modellierungsvielfalt von Budgetbeschränkungen zu geben, werden im folgenden eine Reihe von Entwürfen und ihre Untersuchungsziele vorgestellt. Daraus soll zu erkennen sein, dass eine limitierte Auswahl an Einflussgrößen ausreicht, um ein eingegrenztes Untersuchungsziel zu erörtern. Alle genannten Beispiele entstammen den Ausarbeitungen zur strategischen Vermögensallokation von Campbell und Viceira (siehe dort: Campbell/Viceira 2002).

Wenn der tatsächliche Interessenhorizont eines Individuums nur kurzfristig orientiert ist, kann eine langfristige Portfolioauswahl auf ein Modell zur kurzfristig optimalen Portfolioauswahl zurückgeführt werden. In diesem Modell hat ein Investor ein bestimmtes Vermögen und die Möglichkeit daraus Kapitaleinkünfte zu erzielen. Er hat aber kein Arbeitseinkommen. Die Kapitaleinkünfte ergeben sich aus der auf das Portfolio bezogenen Rendite R_p , die auf der sicheren Rendite, einer konstanten Risikorendite und dem Anteil des riskant angelegten Vermögens beruht. Der Zusammenhang zwischen dem heutigen und morgigen Vermögen wird dann wie folgt formuliert.

$$W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1}) \cdot (W_t - C_t) \quad (3.3.1)$$

Die Zeitindizes bezeichnen dabei Werte, die zu heute verfügbarem Geld gehören mit t , und Werte die morgen verfügbar sind mit $t+1$. Die Portfoliorendite ist aufgrund der in ihr enthaltenen unsicheren Rendite nur ein Erwartungswert. Ihre Indizierung mit $t+1$ soll anzeigen, dass die Kapitaleinkünfte erst in der nächsten Periode verfügbar sind. Ferner ergeben sich die Einkünfte ausschließlich aus dem Nettovermögen nach Abzug des aktuellen Konsums (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 37).

Da in der vorangegangenen Budgetbeschränkung nur das wieder neu angelegte Vermögen Kapitaleinkünfte erwirtschaftet, also vor der Geldanlage am Kapitalmarkt der Konsum vom aktuellen Periodenvermögen abgezogen wird, ist diese Beschränkung eine nichtlineare Formulierung. Um eine lineare Beziehung zu erreichen, setzen Campbell und Viceira die vorherige Budgetbeschränkung relativ zum Vermögen am Periodenbeginn W_t , logarithmieren den gesamten Ausdruck und nähern den dann noch nichtlinearen Term durch eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung an. Daraus ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen der Wachstumsrate des Vermögens und dem aktuellen Vermögen und Konsum und der geschätzten Portfoliorendite.

$$\Delta w_{t+1} = k + r_{p,t+1} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \cdot (c_t - w_t) \quad (3.3.2)$$

Aus einer langfristigen Betrachtung, die aus dieser Beschränkung hervorgeht, haben Campbell und Viceira ohne eine explizite Optimierung ableiten können, dass ein hoher heutiger Konsum mit einer hohen erwarteten Kapitalrendite oder einem geringen Konsumwachstum in der Zukunft verbunden ist (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 50-52). Hierzu kann angemerkt werden, dass die langfristige Betrachtung für einen unendlichen Zeithorizont durchgeführt wurde, weshalb ein Term durch seinen Grenzwert von Null entfallen ist. Ferner wird in dieser Modellierung wie in der vorherigen kein Arbeitseinkommen berücksichtigt.

Die bisherigen Formulierungen waren für diskrete Zeitbetrachtungen ausgelegt, das Marktgeschehen des für die Vermögensanlage so hoch relevanten Kapitalmarkts lässt sich aber mit zeitkontinuierlichen Beschreibungen besser erfassen. Folglich sollte es auch möglich sein, eine Nutzenoptimierung im Lebenszyklusmodell zeitkontinuierlich zu formulieren. Campbell und Viceira stellen diesbezüglich eine Variante vor, die von einer zeitlich veränderlichen sicheren Verzinsung und einer thesaurierenden volatilen unsicheren Verzinsung ausgeht. Als Antrieb der Volatilität wird ein Wiener Prozess ausgewählt. Die Budgetbeschränkung ergibt sich dann als Dynamik des Vermögens.

$$dW_t = \left[(\alpha_t (\mu_t - r) + r) W_t - C_t \right] dt + \alpha_t W_t \sigma_p dZ_{pt} \quad (3.3.3)$$

Im Unterschied zur oben skizzierten linearisierten und als Wachstumsrate formulierten Budgetbeschränkung, wird nun aber die Unsicherheit des Kapitalmarkts durch eine Volatilität modelliert. Ferner werden die Kapitalgewinne vom Konsum innerhalb eines Zeitinkrements entkoppelt. Konsum und Kapitaleinkünfte finden nun also parallel nebeneinander statt. Dieser Ansatz dient zunächst dazu, die Mathematik des Problems analytisch handhabbar zu halten, kann aber auch als Idee zur Erfassung der Realität angesehen werden. Privatleute können ihren Konsum mittels Kreditkarten vorfinanzieren, deren Kosten in die Kaufpreise von Gütern und Dienstleistungen eingerechnet werden, da die Kreditkarten selbst eine Form von Dienstleistung darstellen. Eine Verrechnung des Konsums mit dem dynamischen Vermögen findet dann jeweils am Ende des Zeitinkrements statt (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 122).

In der dritten Modellierung wurde nun also auch die Stochastik des Kapitalmarkts im Zeitkontinuum berücksichtigt. Offen bleibt bis dato dennoch eine Erfassung des Arbeitseinkommens. In einem einperiodischen Basismodell, ähnlich dem zuallererst präsentierten Typ mit sicherer und unsicherer Verzinsung, ermöglichen Campbell und Viceira dies in einer Budgetbeschränkung durch additives Hinzufügen eines Terms der Arbeitseinkünfte.

$$C_{t+1} = W_t \cdot (1 + R_{p,t+1}) + L_{t+1} \quad (3.3.4)$$

Diese Formulierung zielt darauf ab, den Konsum einer Periode durch das Arbeitseinkommen dieser Periode und das aktuell verzinste Vermögen der Vorperiode zu determinieren. Die Zeitbeziehungen sind dabei so konstruiert, dass die Maximierung lediglich auf den Nutzen des morgigen Konsums abzielt. Auch wenn das dabei betrachtete Problem kurzfristig ist und lediglich eine Portfolioentscheidung, aber keine grundlegende Konsumententscheidung zu treffen ist, ist es mathematisch dennoch so komplex, dass dafür

nur eine angenäherte analytische Lösung bestimmt werden kann (vgl. Campbell/Viceira 2002, S. 168-171).

Für eine mehrperiodische Analyse der vorgenannten Problemstellung arbeiten Campbell und Viceira erneut mit einer veränderten Budgetbeschränkung. Die Ersparnisse einer Periode werden aus dem zu Beginn der Periode vorhandenen Anfangsvermögens plus Arbeitseinkommen minus Konsum ermittelt. Diese Ersparnisse werden dann mit einer Portfoliorendite verzinst, woraus sich das Anfangsvermögen der nächsten Periode ergibt.

$$W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1}) \cdot (W_t + L_t - C_t) \quad (3.3.5)$$

Analog zum Basismodell ist auch dieser Zusammenhang wieder zeitdiskret formuliert (vgl. Campbell/Viceira 2002, S. 183). Wie zu erkennen ist, gibt es je nach berücksichtigten Randbedingungen unterschiedliche Entwürfe zur Modellierung einer Budgetbeschränkung. Insbesondere das für die weitere Kapitalentwicklung maßgebliche Sparvermögen wird je nach den im Modell berücksichtigten Einflussgrößen spezifisch formuliert.

Das Ziel des Lebenszyklusmodells dieser Arbeit ist es, die von den verschiedenartigen Nutzenfunktionen hervorgerufenen Unterschiede zwischen nutzenoptimalen Entscheidungen herauszuarbeiten. Dazu wird das Modell nur an einigen Punkten sensibel und sonst möglich stabil gehalten. Ein erster Ansatz für eine Budgetbeschränkung wurde zunächst als Bedingung für das Anfangsvermögen der Folgeperiode formuliert.

$$W_{t+1} = (e^{r + \alpha_t \cdot (r_{eq,t} - r)}) \cdot (W_t + L_t - C_t) \quad (3.3.6)$$

Wie in der zeitkontinuierlichen Budgetbeschränkung von Campbell und Viceira laufen auch hier die Vermögensentwicklung, der Verdienst von Arbeitseinkommen und der Konsum parallel nebeneinander ab. Nüchtern betrachtet ist diese Annahme für ein Modell, das mit jährlichen Perioden arbeiten soll, nicht mehr oder weniger plausibel, als die gegenteilige Annahme einer sukzessiven Verzinsung, wie sie in Formel (3.3.5) zu finden ist. Die gewählte Beziehung lässt sich dadurch rechtfertigen, dass nur das während der kompletten Periode am Kapitalmarkt angelegte Vermögen eine renditebedingte Veränderung erfahren kann. Einkommen und Konsum einer Periode werden erst am Periodenende miteinander und dem entwickelten Vermögen verrechnet. Realistisch vorstellbar ist dieser Ablauf mit einer Kreditkarte, die nur einmal je Periode und zwar an deren Ende abgerechnet wird. Das Budget der Karte entspricht dem des Konsums in diesem Modell.

$$C_t = (e^{r+\alpha_t \cdot (r_{eq,t} - r)}) \cdot W_t + L_t - W_{t+1} \quad (3.3.7)$$

Was hier prinzipiell mathematisch korrekt aussieht, lässt sich aber nicht ohne weiteres in einem Rechenmodell umsetzen, da es jeweils pro aktuellem Anfangsvermögen eine Vielzahl möglicher Werten für das Anfangsvermögen der Folgeperiode gibt, was im numerischen Rechengang zu unerwünschten Komplikationen führt. Alternativ dazu wurde ein zweiter Ansatz erstellt, der zum einen auf einer klareren Aussage aufbaut und zum anderen leichter in einen Berechnungsalgorithmus integriert werden kann. Die gewählte Formulierung setzt sich multiplikativ aus dem Konsumanteil und dem gesamten zur Verfügung stehenden Budget zusammen. Letzteres besteht aus dem Arbeitseinkommen und dem vom Kapitalmarkt veränderten Anfangsvermögen.

$$C_t = (1 - s_{W,t}) \cdot \left[(e^{r+\alpha_t \cdot (r_{eq,t} - r)}) \cdot W_t + L_t \right] \quad (3.3.8)$$

Eigentlich könnte man meinen, dass eine zusätzlich eingeführte Variable ein Problem komplexer macht, in diesem Fall trifft aber das Gegenteil zu. Die auf das gesamte in einer Periode verfügbare Vermögen bezogene Sparquote $s_{W,t}$ lässt die Gleichung übersichtlicher werden und erleichtert zudem die Implementierung der Budgetbeschränkung in einem numerischen Rechenverfahren. Der Konsum ist nicht mehr abhängig von der Höhe des morgigen Anfangsvermögens. Umgekehrt kann das morgige Anfangsvermögen auch ohne direkten Bezug zum heutigen Konsum formuliert werden.

$$W_{t+1} = s_{W,t} \cdot \left[(e^{r+\alpha_t \cdot (r_{eq,t} - r)}) \cdot W_t + L_t \right] \quad (3.3.9)$$

Die Zusammenhänge (3.3.8) und (3.3.9) sind von Campbell und Viceira inspiriert, entsprechen aber keiner der von ihnen vorgelegten Formulierungen. Daher ist es prüfenswert, ob und wenn ja welche Ähnlichkeiten zu klassischen Konsumbeziehungen bestehen. Als Vergleich werden dazu die etablierten Modelle von Fisher, Modigliani und Friedman herangezogen.

Im Zweiperiodenmodell von Fisher existiert in der ersten Periode kein Anfangsvermögen, Ersparnisse ergeben sich erst aus der Differenz von Einkommen und Konsum. In der Folgeperiode stehen die verzinnten Ersparnisse der ersten Periode und das reguläre Einkommen der zweiten Periode für den Konsum zur Verfügung (vgl. Mankiw 2003, S. 502-503).

$$S = Y_1 - C_1 \quad (3.3.10)$$

$$C_2 = (1 + r) \cdot S + Y_2 \quad (3.3.11)$$

Die Lebenszyklushypothese von Modigliani stellt einen Bezug zwischen dem gesamten während eines Lebens verfügbaren Vermögen und der Lebenszeit her. Der Konsum ergibt sich dabei als über die Zeit gleichverteilter Wert aus der Summe von aktuellem Vermögen und gesamtem zukünftigem Einkommen.

$$C = \frac{W + R \cdot Y}{T} = \frac{1}{T} \cdot W + \frac{R}{T} \cdot Y \quad (3.3.12)$$

Das Einkommen bezieht sich auf das jährliche Arbeitseinkommen, die Vermögensentwicklung wird von Modigliani nicht modelliert. Der Faktor R beinhaltet das gegenwärtige und alle zukünftigen Jahre mit Arbeitseinkommen. R entspricht also der Anzahl der Arbeitsjahre bis zum Renteneintritt während T die Anzahl der noch verbleibenden Lebensjahre darstellt (vgl. Mankiw 2003, S. 514).

Eine Ergänzung zu Modiglianis Lebenszyklushypothese hat Friedman mit seiner Hypothese des permanenten Einkommens geliefert. Er unterscheidet das Einkommen in relativ sicheres und daher permanentes sowie in unsicheres und nur vereinzelt erzielbares, welches als transitorisches Einkommen bezeichnet wird. Maßgeblich ist nach Friedmans Sicht nur das permanente Einkommen, von dem ein nahezu konstanter Anteil verkonsumiert wird (vgl. Mankiw 2003, S. 518-519).

$$C = \alpha \cdot Y^P \quad (3.3.13)$$

Wenn nun aus den Gleichungen (3.3.8) und (3.3.9) ein Zweiperiodenmodell mit einem Anfangsvermögen $W_1=0$ und einer Sparquote $s_{W,2}=0$ geformt wird, lassen sich Komponenten der klassischen Konsumbeziehungen darin wiederfinden.

$$C_1 = (1 - s_{W,1}) \cdot L_1 \quad (3.3.14)$$

$$W_2 = s_{W,1} \cdot L_1 \quad (3.3.15)$$

$$C_2 = (e^{r + \alpha_2 \cdot (r_{eq,2} - r)}) \cdot W_2 + L_2 \quad (3.3.16)$$

Gleichung (3.3.16) entspricht relativ weitgehend dem zweiten Jahr von Fishers Modell, dargestellt in (3.3.11), wenn man einmal davon absieht, dass die Verzinsung unterschiedlich formuliert ist. Die Bestimmung der Ersparnisse, bei Fisher (3.3.10), erfolgt im Modellierungsentwurf für $W_1=0$ in Abhängigkeit von der Sparquote und damit nicht direkt aus dem Konsum der ersten Periode (3.3.15). Wenn die Sparquote konstant ist, liegt die Konsumgleichung (3.3.14) wiederum nahe an Friedmans permanenter Einkommenshypothese (3.3.13). Auch mit Modiglianis Konsumgleichung (3.3.12) lassen sich Ähnlichkeiten finden, die allerdings nicht überstrapaziert werden dürfen, da die Aussa-

ge Modiglianis eine andere ist, als die einer durch Auflösen der Klammer umgeformten Gleichung (3.3.8). Letztlich haben diese Vergleiche gezeigt, dass die gewählte Modellierung in der Nähe der klassischen Konsumhypothesen liegt und somit als theoriekonform angesehen werden kann.

3.4 Das Arbeitseinkommen im Lebenszyklus

In den vorangegangenen Kapiteln wurde erläutert, wie Menschen ihren erwarteten Nutzen bestimmen um ihn zu optimieren und daraus Schlüsse für richtige Entscheidungen ziehen zu können. Der Konsum ist dabei die primäre Quelle des Nutzens und somit eine zentrale Größe des Optimierungsproblems, allerdings wird er selbst von einer Reihe anderer Größen beeinflusst, wie mit den Budgetbeschränkungen gezeigt wurde. Endogene Entscheidungsvariablen der Nutzenmaximierung sind im entworfenen Modell nur die Sparquote und die Aktienquote. Alle anderen Einflüsse werden als exogen angenommen.

Während in einigen vorgestellten Budgetbeschränkungen der Konsum lediglich in Relation zu Vermögen und Kapitaleinkommen steht, beziehen die Konsumhypothesen das Arbeitseinkommen als äquivalente Einflussgröße stets mit ein. Zusammen mit dem Bedürfnis nach Konsumwachstum ist der typische Verlauf des Einkommens im Lebenszyklus der wesentliche Grund für die Bildung von Ersparnissen. Würde das Einkommen fortwährend bis zum Lebensende ansteigen, gäbe es tatsächlich keinen Grund zu sparen. Um Entscheidungen bezüglich Konsum und Nutzen treffen zu können, muss also die Entwicklung des Arbeitseinkommen möglichst detailliert bekannt sein.

Ein interessantes Modell zur Beschreibung des Verlaufs des Arbeitseinkommen haben Cocco, Gomes und Maenhout in ihrer Veröffentlichung zu Konsum und Portfolioentscheidungen im Lebenszyklus verwendet (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 495-501). Aufgrund seiner plausiblen Detaillierung ist das Modell so attraktiv, dass es als Grundlage für die Simulation des Arbeitseinkommen in dieser Arbeit herangezogen wird. Da die Zielsetzung dieser Untersuchung nicht im Bereich der Portfolioentscheidungen sondern im Vergleich von Nutzenfunktionen liegt, werden in der Einkommenssimulation einige wenige vereinfachende Änderungen vorgenommen. In prinzipiell ähnlicher Form ist die ausgewählte Modellierung auch in anderen Quellen zu finden (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 208-210).

Das Arbeitseinkommen umfasst, kurz ausgedrückt, alle möglichen Einkommensarten, die nicht mit Kapitalbesitz und Vermögen in Verbindung stehen. Neben Lohn und Ge-

halt sind dies vor allem Arbeitslosengeld, soziale Transferleistungen und familiäre Unterstützung. Da es ein Ruhestandseinkommen gibt, entspricht das verfügbare Einkommen im Grunde einem Nettobetrag nach Abzug von Rentenpflichtversicherungsbeiträgen. Cocco, Gomes und Maenhout arbeiten mit US-amerikanischen Daten und differenzieren den Einkommensverlauf zunächst nach drei Ausbildungsstufen (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 498). Individuen ohne Hochschulabschluss haben über die Lebenszeit gesehen einen relativ flachen Einkommenverlauf. Individuen mit Hochschulabschluss haben einen etwas gewölbteren und im Durchschnitt durchweg höheren Verlauf als Individuen ohne Abschluss. Mit einem Collegeabschluss starten Individuen später und auf niedrigerem Niveau ins Erwerbsleben, dafür steigt ihr Einkommensverlauf relativ steil an und bleibt dann bis zum Lebensende oberhalb der beiden anderen Gruppen. Jede dieser Ausbildungsstufen hat einen eigenen Parameter, der das Ruhestandseinkommen als Anteil vom letzten Arbeitseinkommen angibt. Laut Auswertung der Daten erleidet die mittlere Bildungsstufe dabei den größten Verlust. Das macht die Hochschulabgänger wiederum attraktiv für eine Untersuchung optimaler Sparentscheidungen, keine andere Gruppe muss so hohe Eigenleistungen zur Sicherung des Lebensstandards im Ruhestand erbringen. Voraussichtlich können sich Unterschiede zwischen im Lebenszyklusmodell verwendeten Nutzenfunktionen dadurch am ehesten herausstellen.

Die nachfolgende Beschreibung bezieht sich in allgemeiner Form auf die Modellierung des Einkommensverlaufs aller Gruppen, sofern Zahlenwerte genannt werden ausschließlich auf die mittlere Bildungsstufe. Alle Formulierungen orientieren sich am Modell von Cocco, Gomes und Maenhout (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 495-501). Das Arbeitseinkommen wird logarithmisch formuliert, somit lassen sich die einzelnen Komponenten additiv verknüpfen. Das volatile Arbeitseinkommen Y setzt sich aus drei Hauptkomponenten zusammen, die jeweils weitere Detaillierungen beinhalten. Der Index i unterscheidet zwischen verschiedenen Individuen, der Index t bezieht sich auf das betrachtete Lebensjahr.

Volatiles Einkommen in der Phase der Erwerbstätigkeit

$$\log(Y_{it}) = f(t, Z_{it}) + v_{it} + \varepsilon_{it} \quad (3.4.1)$$

Deterministische Einkommenskomponente

$$f(t, Z_{it}) = f(t) + f(Z_{it}) \quad (3.4.2)$$

Einfluss des Lebensalters $f(t)$

$$f(t) = -2,17 + 0,1682 \cdot t - 0,00323 \cdot t^2 + 0,00002 \cdot t^3 \quad (3.4.3)$$

Einfluss der Familiengröße und des Familienstands plus einer Konstanten

$$f(Z_{it}) = -0,0236 + 0,4437 + 2,7004 \quad (3.4.4)$$

Permanente stochastische Einkommenskomponente

$$v_{it} = v_{i,t-1} + u_{it} \quad (3.4.5)$$

mit Aktienkursen korrelierter bzw. individueller Schock

$$u_{it} = \xi_{it} + \omega_{it} \quad \text{mit} \quad \xi_{it} \sim N(0, \sigma_{\xi}^2), \quad \omega_{it} \sim N(0, \sigma_{\omega}^2) \quad (3.4.6)$$

Temporäre stochastische Einkommenskomponente

$$\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2) \quad (3.4.7)$$

Konstantes Einkommen in der Ruhestandsphase

$$\log(Y_{it}) = \log(\lambda \cdot Y_{iK}) \quad (3.4.8)$$

In (3.4.4) werden familiäre Effekte auf das Einkommen eines Haushalts erfasst. Eine große Familie mit überdurchschnittlich vielen Kindern erhält dabei statistisch gesehen einen Abschlag auf das Haushaltseinkommen. Eine verheiratetes Paar hat wiederum ein höheres Einkommen, als ein unverheiratetes. Ferner ergibt sich aus der Regression noch eine bildungsspezifische Konstante.

Die bleibenden Auswirkungen von positiven oder negativen Zufallsveränderungen werden in der permanenten stochastischen Einkommenskomponente (3.4.5) erfasst. Eine Verbindung zwischen Kapitalmarkt, Aktienkursen, Arbeitswelt und Arbeitseinkommen leistet der Schock ξ in (3.4.6). Dieser ist mit der Aktienrendite der aktuellen Periode korreliert und wird bei Cocco, Gomes und Maenhout für alle Arbeitnehmer gleich gesetzt, im hiesigen Modell jedoch auch individuell modelliert. In der Monte Carlo Simulation wird die Zufallszahl ξ mit einer Cholesky-Faktorisierung für korreliert normalverteilte Zufallszahlen generiert (vgl. Kaninke 2004, S. 121). Die Zahlenwerte für die Varianzen bzw. Standardabweichungen der Schocks können im Programmcode der Zufallszahlengeneration im Anhang dieser Arbeit nachgelesen werden.

Im Gegensatz zur Modellierung von Cocco, Gomes und Maenhout hat der temporäre Schock ε_{iK} im letzten Jahr des Erwerbslebens, indiziert mit $t=K$, im hiesigen Modell doch eine bleibende Wirkung, da er in die Bestimmung des konstanten Ruhestandseinkommens mit einfließt (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 495-496). Der Verzicht auf weitere Schwankungen am Ende der Erwerbstätigkeit stellt zwar eine unrealistische Vereinfachung dar, kann aber damit rechtfertigt werden, dass es den weiteren Rechengang vereinfacht ohne die prinzipielle Aussagefähigkeit des Modells zu limitieren.

Die Risiken Berufsunfähigkeit, länger währende Arbeitslosigkeit und frühzeitige Verrentung werden vom modellierten Verlauf des Arbeitseinkommens nicht dargestellt. Andererseits bewirken die auf US-amerikanischen Erhebungen beruhenden Varianzen der permanenten und temporären Schocks erhebliche Schwankungen, welche den Einkommensverlauf für ein einzelnes Individuum durchaus risikoreich gestalten.

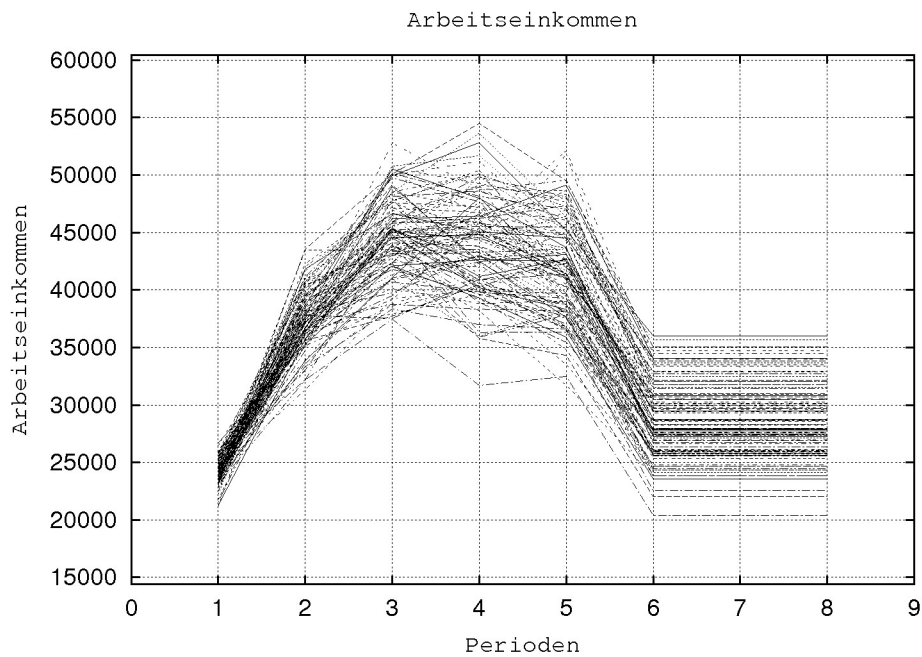


Abbildung 12: Simulationen des Einkommensverlaufs

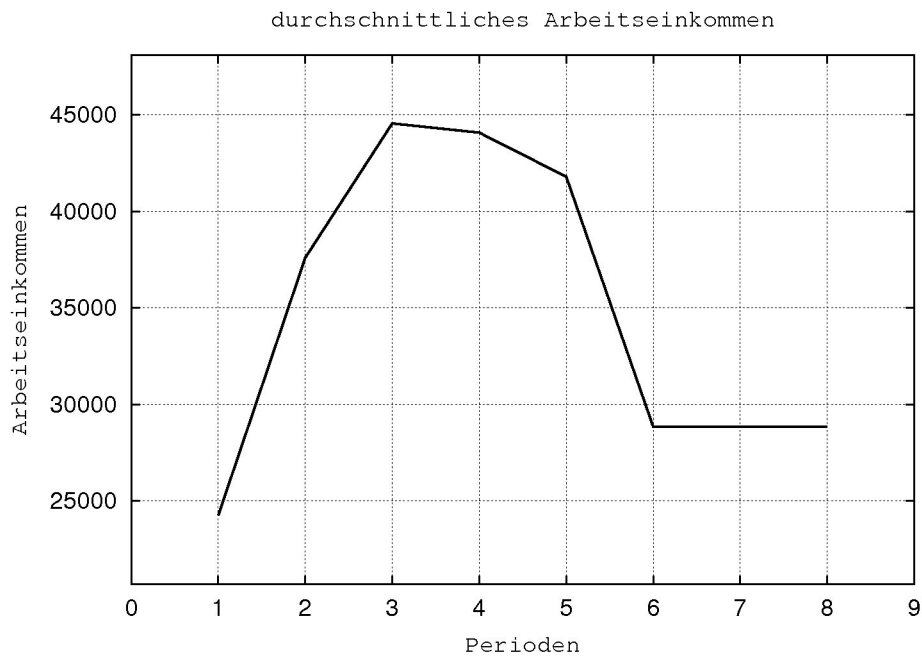


Abbildung 13: Charakteristischer Verlauf als Mittelwert einer Simulation

Für die Modellierung wird festgelegt, dass das Humanvermögen, also der Wert des heutigen und zukünftigen Arbeitseinkommen, nicht über die aktuelle Periode hinaus kreditwürdig ist und somit nicht beliehen werden kann. Theoretisch betrachtet ist das Humanvermögen demnach ein nicht am Markt handelbares Vermögen (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 167). Praktisch liegt bereits in der gewählten Konsumbeziehung (3.3.8) eine ad hoc Kreditbeschränkung vor, wenn die auf das verfügbare Vermögen bezogene Sparquote sW nicht negativ sein kann.

3.5 Die Modellierung des Kapitaleinkommens

Analog zur Definition des Arbeitseinkommens erfährt auch das Kapitaleinkommen als relevante Größe der Budgetbeschränkung eine eigene Modellierung. Allerdings wird nicht das Kapitaleinkommen an sich modelliert, sondern die Kapitalrendite, aus der sich zusammen mit dem Sparvermögen das Einkommen ergibt. Die Renditen von Kapitalanlagen entstehen aus deren Ausschüttungen und infolge von am Markt ausgehandelten Wertveränderungen innerhalb einer bestimmten Zeitspanne. Die wertgebenden Marktpreise von Investments beruhen dabei gleichermaßen auf Annahmen zu ihrer weiteren Entwicklung sowie auf dem Risikoverhalten der Kapitalanleger. Im Zusammenhang mit dem „Equity-Premium-Puzzle“ wurde dieses Thema in Kapitel 2.2 bereits angesprochen. Renditen und deren Schwankungen sind nicht nur die grundlegenden Unterschiede zwischen verschiedenen Kapitalanlagen, sie sind auch durch einen für den gesamten Kapitalmarkt charakteristischen Zusammenhang miteinander verbunden: Anlageformen mit höheren Volatilitäten werden im Regelfall mit höheren Renditen vergütet. Daher kann ein prinzipiell unsicheres Engagement am Kapitalmarkt ansatzweise durch zwei Wertpapiere abgebildet werden: ein sicheres, mit relativ niedriger Rendite und ein unsicheres, mit relativ hoher Rendite. Die Kapitalrendite des gesamten Engagements ergibt sich schließlich aus der Portfolioaufteilung zwischen den beiden Wertpapieren, dabei gibt α den Anteil des unsicheren Wertpapiers im Portfolio an.

$$r_{gesamt} = r_{sicher} + \alpha \cdot (r_{unsicher} - r_{sicher}) \quad (3.5.1)$$

Für die Modellierung der unsicheren Rendite wird regelmäßig auf die Preisentwicklung von Aktien zurückgegriffen. Standardmäßig wird dieser Entwicklung eine Geometrische Brownsche Bewegung zu Grunde gelegt. Die stochastischen Eigenschaften der Aktienrenditen beruhen dann auf einem allgemeinen Wiener Prozess. Wesentlicher Vorteil einer Geometrischen Brownschen Bewegung ist, dass der Trend oder Drift und die Volatilität oder Diffusion relativ zum aktuellen Preis angegeben und somit unabhängig von diesem betrachtet werden können (vgl. Kaninke 2004, S. 126).

Zur Veranschaulichung der Rolle der Geometrischen Brownschen Bewegung in der Modellierung der unsicheren Renditen wird im folgenden eine Herleitung der Dynamik von Aktienkursen präsentiert (vgl. Albrecht/Maurer 2008, S. 172-180 und Hull 2006, S. 265-273).

stochastische Differentialgleichung des geometrischen Wiener Prozesses als Ansatz der Dynamik von Aktien unter realen Wahrscheinlichkeiten p

$$dS = \mu \cdot S dt + \sigma \cdot S dW_t \quad (3.5.2)$$

mit dem Wiener Prozess

$$dW_t = \epsilon \cdot \sqrt{dt} \quad (3.5.3)$$

Satz von Itô als funktionales Werkzeug für eine nachfolgende Integration

$$df(S, t) = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (3.5.4)$$

quadrieren der stochastischen Differentialgleichung führt aufgrund des Entfalls der Terme mit quadratischem oder vermischtem dt zu einer Vereinfachung von $(dS)^2$

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 \epsilon^2 dt \quad (3.5.5)$$

und daraus auch für den Satz von Itô

$$df(S, t) = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \epsilon^2 dt \quad (3.5.6)$$

mit einer Betrachtung des Erwartungswerts

$$E[\epsilon^2 dt] = E[\epsilon^2] dt = 1 \cdot dt \quad (3.5.7)$$

ergibt sich der Satz von Itô wie folgt

$$df(S, t) = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \quad (3.5.8)$$

aufgrund beschränkter Haftung der Eigentümer gilt für den Wert von Aktien die Regel $S \geq 0$, was einen exponentiellen Zusammenhang für Aktienpreise nahe legt

$$S = e^f \rightarrow \ln S = f \rightarrow d \ln S = df \quad (3.5.9)$$

mit den Ableitungen von $f = \ln S$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (3.5.10)$$

ergibt sich eine Umformung des Satzes von Itô

$$d \ln S = \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \quad (3.5.11)$$

darin wird wieder dS eingesetzt

$$d \ln S = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \quad (3.5.12)$$

woraus umgeformt die Geometrische Brownsche Bewegung ergibt

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (3.5.13)$$

eine Integration von t bis t+δt und umformen der Stochastik führen zu

$$\ln S_{t+\delta t} - \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \delta t + \sigma \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\delta t} \quad (3.5.14)$$

und

$$\ln S_{t+\delta t} = \ln S_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \delta t + \sigma \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\delta t} \quad (3.5.15)$$

exponieren ergibt eine multiplikative Verknüpfung der Aktienkurse

$$S_{t+\delta t} = S_t \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \delta t + \sigma \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\delta t}} \quad (3.5.16)$$

Damit steht die Modellierung der Rendite des riskanten Anlageinstruments fest. Zukünftige Aktienkurse hängen alleine vom gegenwärtigen ab, die Renditen sind unabhängig voneinander und streuen im Rahmen einer Normalverteilung. Ergänzend ist noch festzuhalten, dass die Aktienpreise als thesaurierend aufgefasst werden, Dividenden werden dabei nicht ausgezahlt sondern reinvestiert. Ferner wird in dieser Untersuchung die Inflation nur insofern berücksichtigt, als dass alle Renditen, auch die der sicheren Anlageform, nur als Realgröße erfasst werden. Modelliert werden der Drift μ mit $\mu = 6\%$ und die Volatilität σ mit $\sigma = 18\%$.

Als Alternative zur unsicheren Aktienanlage soll dem Sparer im Lebenszyklusmodell eine sichere Investmentgelegenheit geboten werden. Allgemein werden dazu Staatsanleihen betrachtet, da diese langfristig eine relativ geringe Volatilität in ihren Renditen aufweisen. Eine prominente Möglichkeit diese Renditen zu modellieren ist das Vasicek-Modell, das ebenfalls auf einer stochastischen Differentialgleichung aufbaut. Grundlage ist hierfür der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, der zu einem autoregressiven Verlauf der

Anleiherenditen führt. Tatsächlich kann das Modell, genauso wie eine hohe Inflation in der Realität, zu negativen Zinssätzen führen. Somit sind Staatsanleihen nur relativ sicherer als Aktieninvestments, aber nicht absolut sicher.

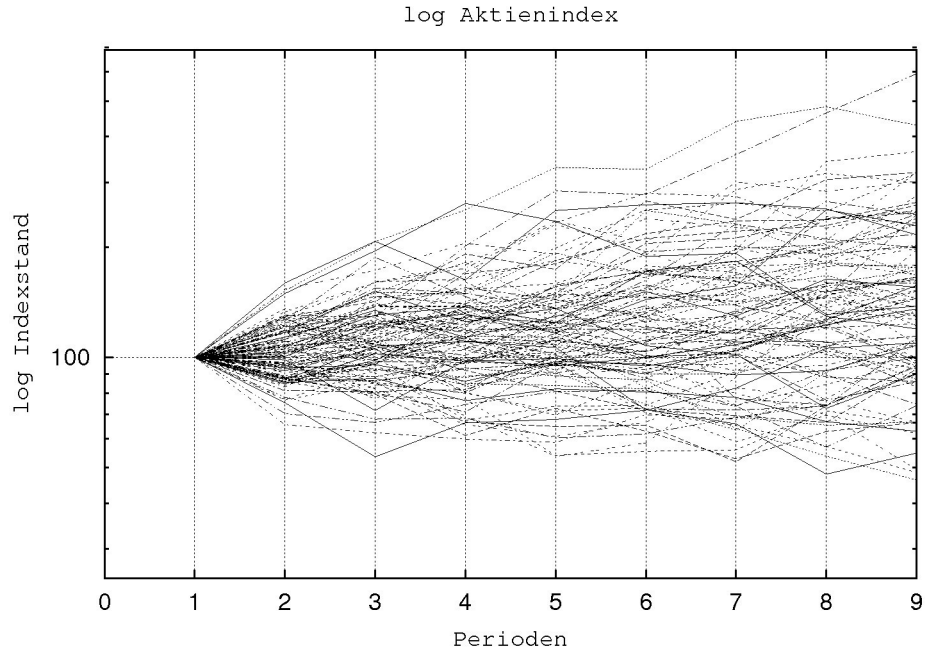


Abbildung 14: Simulation der Wertentwicklungen unsicherer Investments

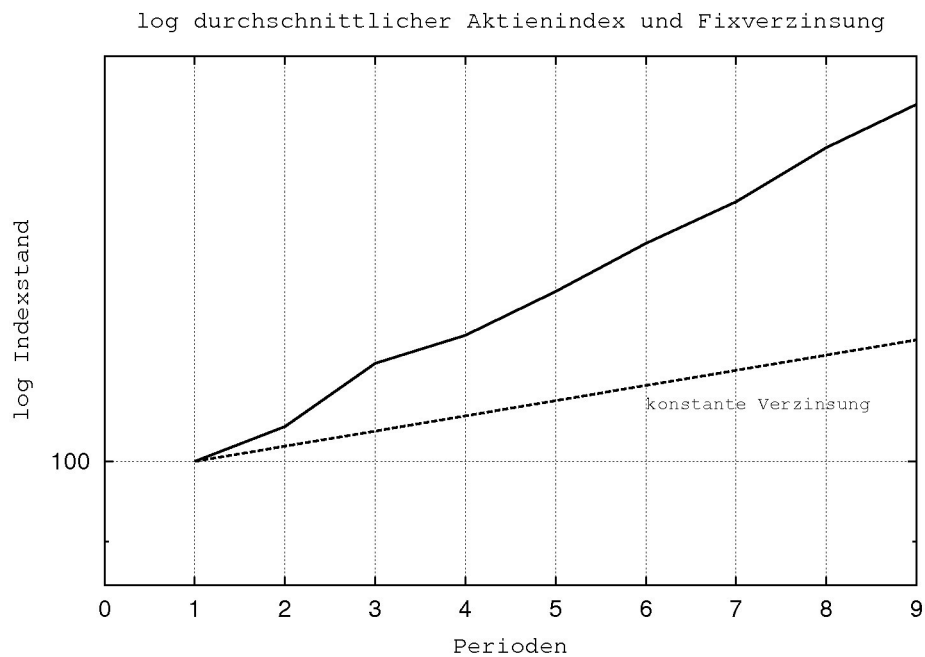


Abbildung 15: Durchschnitt unsicherer und Wertentwicklung sicherer Anlagen

Eine kurzfristige Geldanlage auf Festgeldkonten wird demgegenüber kaum negative Zinsen bieten können, bringt aber durch die regelmäßig erforderliche Neuanlage ein Risiko von Zinsschwankungen mit sich und ist somit ebenso wenig sicher (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 86). Zur Vereinfachung des Rechengangs weicht an dieser Stelle die Modellierung ein Stück von der Realität ab, indem ohne Verweis auf ein konkretes Anlageinstrument ein Wertpapier mit konstanter Realverzinsung ohne Volatilität angeboten wird. Als Rechenwert wird dazu eine fixe Verzinsung von 2,00 % gewählt (vgl. Cocco/Gomes/Maenhout 2005, S. 500).

Eine dritte Alternative zur Generierung von Kapitaleinkommen ist ein Lebensversicherungsvertrag. Die Wirkung einer daraus hervorgehenden Leibrente auf das Sparverhalten wurde bereits in Kapitel 3.2 angesprochen, sie nimmt Unsicherheit und führt dadurch zu einer verminderten Sparneigung. Das Thema Leibrenten und deren Entnahmemodellierung wird in der folgenden Untersuchung allerdings nicht weiter verfolgt, da der damit verbundene zusätzliche Aufwand möglicherweise kontraproduktiv ist, da hier intuitiv davon ausgegangen wird, dass Leibrenten die Unterschiede zwischen Nutzenfunktionen eher verwässern als forcieren.

3.6 Erfassung stochastischer Einflüsse

Zur Simulation von Vorgängen, deren Abläufe von Zufallsgrößen beeinflusst werden, hat sich eine als Monte-Carlo-Simulation bezeichnete mathematische Methode etabliert. Allgemein wird davon ausgegangen, dass sich aus der Beobachtung scheinbar zufälliger Ergebnisse Rückschlüsse auf Zusammenhänge zwischen einer bestimmten Ausgangssituation und einem bestimmten Ereignis ziehen lassen. Ferner wird angenommen, dass diese Schlüsse umso sicherer werden, je mehr Beobachtungen zur Verfügung stehen. In Monte-Carlo-Simulationen werden nun die oft wenigen beobachtbaren Ergebnisse durch eine viel größere Anzahl simulierter Ereignisse ersetzt. Dabei werden auch die in einer bestimmten realen Zeitspanne eventuell nicht zu beobachtenden, aber theoretisch möglichen Extremereignisse im Modell erfasst. Darüber hinaus können auch Situationen modelliert und anschließend analysiert werden, die in der Realität so nicht existieren, indem Zufallszahlen als künstlich erzeugte Beobachtungen verwendet werden (vgl. Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003, S. 167-168).

Um eine gewünschte Abbildung der Realität zu gewährleisten müssen zur Durchführung der Simulation die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der unsicheren Einflussgrößen sowie deren stochastische Abhängigkeiten ermittelt werden. Für kurze Simulationszeiträume lassen sich durchaus objektive Wahrscheinlichkeiten aus empirischen Daten

herleiten, für lange Laufzeiten können lediglich subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt werden, die natürlich auch auf Beobachtungen, Schätzungen und Annahmen beruhen (vgl. Kaninke 2004, S. 116). In finanzwirtschaftlichen Fragestellungen hat sich für Analysen wie Simulationen die Annahme einer Normalverteilung als gängigste Grundlage durchgesetzt (vgl. Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003, S. 169). Abweichend davon können einzelne Renditeverteilungen, wie etwa die von Aktienindizes, auch als Student-t-Verteilung angenommen werden (vgl. Amenc/Géhin 2007, S. 23).

Gründe für Alternativen zur Normalverteilungsannahme ergeben sich aus empirischen Betrachtungen, denen zu Folge insbesondere diskrete Renditen auch höhere statistische Momente aufweisen, da sie zum einen linksschief sind, also eher negative als positive Ausreißer haben, und zum anderen leptokurtisch gewölbt sind, also eher mehr Extremereignisse aufweisen und somit an den Rändern fetter sind, als es für eine Normalverteilung üblich wäre. Um dennoch eine Normalverteilung als Annahme nutzen zu können, wird empfohlen, mit stetigen statt diskreten Renditen zu arbeiten, weil damit die empirischen Diskrepanzen deutlich geringer ausfallen. Im Rahmen der Annahme normalverteilter stetiger Renditen sind als maßgebliche Parameter der Erwartungswert bzw. Drift und die Standardabweichung bzw. Volatilität zu bestimmen (vgl. Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003, S. 171-172).

Eine Monte-Carlo-Simulation erfolgt in mehreren Stufen. Zunächst werden die benötigten Zufallszahlen generiert, jeweils separat für alle betrachteten Einflussgrößen. Anschließend sind die Zufallszahlen so zu transformieren, dass sie dieselbe Verteilung und Korrelation wie die tatsächlichen Größen aufweisen. In einem dritten Schritt wird aus den einzelnen Faktoren der Wert des Problems bestimmt. Als nächsten erfolgt eine Wiederholung der ersten Schritte der Monte-Carlo-Simulation. Um eine große Zahl von Wertänderungen simulieren zu können, liegt die Wiederholungsanzahl üblicherweise zwischen 1000 und 10.000 (vgl. Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003, S. 170-171). Nach einer bestimmten Zahl von Simulationsdurchläufen können also dann die Verteilungen der gesuchten Endgrößen und deren statistische Parameter ermittelt werden. Eine grafische Aufbereitungen der Daten ist zudem hilfreich für die abschließende Interpretation der Ergebnisse (vgl. Kaninke 2004, S. 117).

Um valide Ergebnisse liefern zu können, muss ein numerisches Verfahren theoretisch fundiert sein. Im Fall der Monte-Carlo-Simulation geschieht dies durch den Zentralen Grenzwertsatz der Statistik. Demzufolge konvergiert das Resultat einer additiven Verknüpfung von Zufallszahlen gegen eine analoge Verknüpfung der Erwartungswerte die-

ser Zufallszahlen. Mit einer zunehmenden Zahl von Simulationsdurchläufen tritt in den Ergebnissen der Charakter der zu Grunde gelegten Verteilungsannahme somit immer prägnanter zu Tage (vgl. Glasserman 2003, S. 9-10). Auch wenn das Verfahren an sich zu konformen Ergebnissen führt, sind bei dessen Anwendung dennoch einige Punkte zu berücksichtigen, die bei einer unsachlichen Umsetzung möglicherweise zu Verzerrungen oder groben Ungenauigkeiten führen können.

Jede Monte Carlo Simulation beruht auf Zufallszahlen, die von einem Rechner eigenständig erzeugt werden. Da der Generation von Zufallszahlen jedoch ein bestimmter deterministischer Prozess zugrunde liegt, handelt es sich lediglich um Pseudozufallszahlen. Mittlerweile gelten die implementierten Zufallsgeneratoren jedoch als so weit entwickelt, dass deren Ergebnisse ohne Bedenken wie Zufallszahlen genutzt werden können (vgl. Glasserman 2003, S. 39). So wird beispielsweise bereits im erzeugenden Algorithmus per Auswahlverfahren sichergestellt, dass die Zufallszahlen eine bestimmte Verteilung aufweisen. Es können also direkt Zufallszahlen mit einer Standardnormalverteilung generiert werden (vgl. Glasserman 2003, S. 65-71). Allerdings kann eine Monte-Carlo-Simulation auch dann immer noch zu verzerrten oder schlichtweg falschen Ergebnissen führen, wenn die zugrunde gelegte Verteilungsannahme abseits der Realität liegt (vgl. Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003, S. 169).

Zwei andere Möglichkeiten für Verzerrungen ergeben sich aus Diskretisierungen oder Linearisierungen innerhalb der Modellierung. Eine Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Problems in zeitdiskrete Schritte führt zu einer Verletzung der Dynamik des zugrunde liegenden Problems. Daraus ergibt sich eine Abweichung zwischen den simulierten Werten und den analytisch formulierten Werten. Etwas diffiziler ist das zweite Problem: Das Bilden eines Erwartungswerts als arithmetisches Mittel aus einer Reihe von Werten ist eine lineare Operation. Wenn den Werten eine lineare Funktion zugrunde liegt, kann der Erwartungswert beliebig ausgeklammert und zum Abschluss der Berechnungen gebildet werden, wobei er mathematisch konform bleibt. Eine Monte-Carlo-Simulation kann dann die komplette Funktion umfassen. Basieren die betrachteten Werte aber auf einem nichtlinearen Zusammenhang, so kann der Erwartungswert nicht verschoben werden, sondern muss dort gebildet werden, wo er analytisch korrekt auftritt. Wenn die Monte-Carlo-Simulation nun nicht dort durchgeführt wird, wo der Erwartungswert gebildet werden sollte, kommt es zu einem Linearisierungsfehler (vgl. Glasserman 2003, S. 13-15).

4 Der Lösungsweg des Optimierungsproblems

Das Ziel dieser Arbeit ist die Suche nach Unterschieden im Entscheidungsverhalten privater Investoren, welche durch den Einsatz verschiedenartiger Nutzenfunktionen hervorgerufen werden. Die grundlegenden Zusammenhänge und maßgeblichen Größen dieser Problematik wurden in den vorangegangenen Kapiteln erörtert. Offen ist noch, wie der optimale Erwartungsnutzen nun letztlich ermittelt wird. Eine analytische Lösung kann möglicherweise über eine Differentialrechnung erarbeitet werden, allerdings wäre das Ergebnis in Form von Differentialgleichungen möglicherweise so komplex, dass es kaum als Lösung zu erkennen wäre (vgl. Campell/Viceira 2002, S. 123-125). Alternativ kann ein rein numerischer Lösungsweg beschritten werden.

Startpunkt der numerischen Optimierung ist die Bellman-Gleichung, welche einige bereits angesprochene Aspekte vereint. Bei Konzentration auf ihre Kernaussage kann sie folgendermaßen dargestellt werden (vgl. Adda/Cooper 2003, S. 147).

$$V_t = \max [U_t + \beta \cdot p_{t,t+1} \cdot E_t [V_{t+1}]] \quad (4.0.1)$$

Die Bellman-Gleichung ist rekursiv formuliert und ermittelt einen Gesamtwert, der sich als Maximum der Summe aus heutigem Periodennutzen und einem abdiskontierten, mit der Überlebenswahrscheinlichkeit gewichteten Erwartungswert des morgigen Gesamtwerts ergibt. Dabei sind der heutige Nutzen U_t und der morgige Wert V_{t+1} miteinander über Nebenbedingungen verknüpft, die als Budgetbeschränkung (3.3.8) und Vermögensbeziehung (3.3.9) bereits formuliert wurden. Im Zuge der Maximierung werden auch die optimalen Werte der endogenen Entscheidungsvariablen sW und α bestimmt. Bedingt durch die rekursive Formulierung wird die numerische Lösung periodenweise rückwärtslaufend bestimmt.

Die Implementierung der gesamten Optimierung erfolgt in mehreren Etappen, die in separaten Programmcodes abgelegt werden. Grundsätzlich können dabei drei Stufen unterschieden werden: Vorbereitung, Durchführung und Auswertung. Zur Vorbereitung gehört die Deklaration der Überlebenswahrscheinlichkeiten in einem eigenständigen Datensatz. Die nach männlich und weiblich getrennten Werte entstammen dem öffentlichen Datenangebot des Statistischen Bundesamts (vgl. Destatis 2008). Ein weiterer vorbereitender Programmteil generiert simulierte Werte für das Arbeitseinkommen und die unsichere Aktienrendite. Im Zuge der zweiten Etappe werden fünf nach Nutzenfunktionen getrennte Optimierungen programmiert, die jeweils auf die vorbereiteten Datensät-

ze zugreifen. Ein Vergleich der Optimierungsergebnisse wird abschließend mit einer grafischen Auswertung ermöglicht.

Kern der Implementierung ist die Durchführung der numerischen Optimierung. Basierend auf der rekursiven Gleichung (4.0.1) wird die Optimierung in Rückwärtsschritten von der Endperiode zur Anfangsperiode durchgeführt. Im Gegensatz zur eigentlich vorgesehenen Vorgehensweise, die eine Iteration jedes Periodenwerts vorsieht, wie es auch in Kapitel 3.1 dargestellt wurde, wird im folgenden nur mit der suboptimalen ersten Lösung einer jeden Periode weitergearbeitet. Die Gründe für diese und alle weiteren Vereinfachungen liegen in der unheimlich langen Rechendauer, die für eine wirklich theoriekonforme Implementierung erforderlich sind.

Zur Ermittlung eines Erwartungswerts des optimalen Gesamtnutzens wird in jeder Periode eine Monte Carlo Simulation über die Optimierung des Gesamtnutzens durchgeführt. Je Simulationsdurchgang erfolgt zunächst eine Variation des Problems für die Größen Sparquote sW , Aktienanteil α und Anfangsvermögen W . Letzteres entspricht dabei einer Art Laufvariable, sW und α sind die Entscheidungsvariablen des Optimierungsproblems. Basierend auf der Budgetbeschränkung gemäß (3.3.8) und der jeweils analysierten Nutzenfunktion wird der Wert des aktuellen Periodennutzens, bzw. bei Epstein-Zin der erste Term der Funktion, abhängig von sW , α und W bestimmt. Für alle Perioden, außer der Endperiode, wird basierend auf sW zudem der Wert des Anfangsvermögens der Folgeperiode berechnet und mit einer Extrapolation auf das bestehende Raster für W gezwängt. Der Gesamtwert ergibt sich dann entsprechend aus Gleichung (4.0.1), wobei das gerade extrapolierte Vermögen der Folgeperiode ausschlaggebend für die Wahl des zuvor berechneten, aber zeitlich nachfolgenden Gesamtwerts ist. Aus der Variation wird je Periode und je Simulationsdurchgang ein nur noch von W abhängiger optimaler Gesamtwert ermittelt. Eine einfache Mittelwertbildung führt auf Simulationsebene dann zu einem einem von W abhängigen optimalen Gesamtwert der gerade betrachteten Periode.

Nachdem im Rückwärtsgang für alle Perioden ein Gesamtwert $V(W)$ ermittelt wurde, kann ausgehend vom Anfangsvermögen W_0 der zeitlich ersten Periode ein optimaler Pfad für alle Größen bestimmt werden, zu denen zuvor in jeder Periode bei der Mittelwertbildung optimale Werte abgelegt wurden. Die auch bei der Bestimmung des optimalen Pfads wieder anzuwendende Extrapolation des Vermögens auf das vorgegebene Raster bewirkt prinzipiell eine Verzerrung der Lösung. Da der numerischen Optimierung eine Rastersuche zugrunde liegt, ist für das Vermögen in jedem Fall eine Diskreti-

sierung zu wählen, hier mit einer Rastergröße von 1000 für Werte von 0 bis 799000 für W . Die Sparquote s_W wird von 0 bis 1 mit 0,05er Schritten diskretisiert, die Aktienquote α nur mit 0 und 1.

Das vorstehende Verfahren wird nahezu gleichförmig für alle Nutzenfunktionen außer der „Temporal Risk Aversion“ angewandt. Für diese wird zwar ebenfalls eine numerische Optimierung auf Basis einer Rastersuche mit der genannten Diskretisierung implementiert, sie unterscheidet sich allerdings in der Art und Weise, wie optimale Werte aus den Folgeperioden in die Berechnung des jeweils aktuellen Gesamtnutzens einfließen und benötigt eine wesentlich längere Rechenzeit.

5 Berechnungsergebnisse

5.1 Optimale Spar- und Anlageentscheidungen

Die nachfolgend grafisch dargestellten Berechnungsergebnisse beruhen auf einer Simulation des Arbeitseinkommens und der Kapitalmarktrenditen mit 100 Simulationsdurchgängen für eine Laufzeit von 8 Perioden. Die eigentlich als Untersuchungsgegenstand vorgesehene Zeitspanne vom 20. bis zum 100. Lebensjahr wird somit auf ein Zehntel reduziert. Der charakteristische Verlauf des Arbeitseinkommens bleibt erhalten, da die Rechenwerte in einem zehnjährigen Rhythmus aus den Zufallsdaten der Monte Carlo Simulation selektiert werden.

Nutzenfunktion	Risikoaversion	2. Parameter	Anfangsvermögen	Rechenzeit
CRRA Constant Relative Risk Aversion	$\gamma=2,5$		10000	10766 s
Spirit of Capitalism	$\gamma=2,5$	$\lambda=1/3$ Statusbewusstsein	10000	13020 s
Consumption Externality	$\gamma=2,5$	$\kappa=0,7$ Neidparameter	10000	10730 s
TRA Temporal Risk Aversion	γ =variabel	$\alpha=7,0$ langfristige Risikoaversion	10000	49173 s
Epstein-Zin	$\gamma=2,5$	$\psi=1,2$ Elastizität der Intertemporalen Substitution	10000	11094 s

Tabelle 1: *Verwendete Parameter und Rechenzeit der Optimierung*

Gezeigt werden die optimalen Spar- und Aktienquoten aller fünf verschiedenen Optimierungen. Zusätzlich erfolgt eine Präsentation der weiteren Rechenergebnisse für jeweils eine Nutzenfunktion. Die verwendeten Parameter und die erforderliche Rechenzeit können der Tabelle entnommen werden. Im Rechengang mit der „Consumption Externality“-Nutzenfunktion wird der zuvor in der CRRA-Optimierung ermittelte optimale Konsum als Vergleichsmaßstab herangezogen. Alternativ könnte auch einer der anderen Konsumpfade oder ein frei modellierter vorgegeben werden.

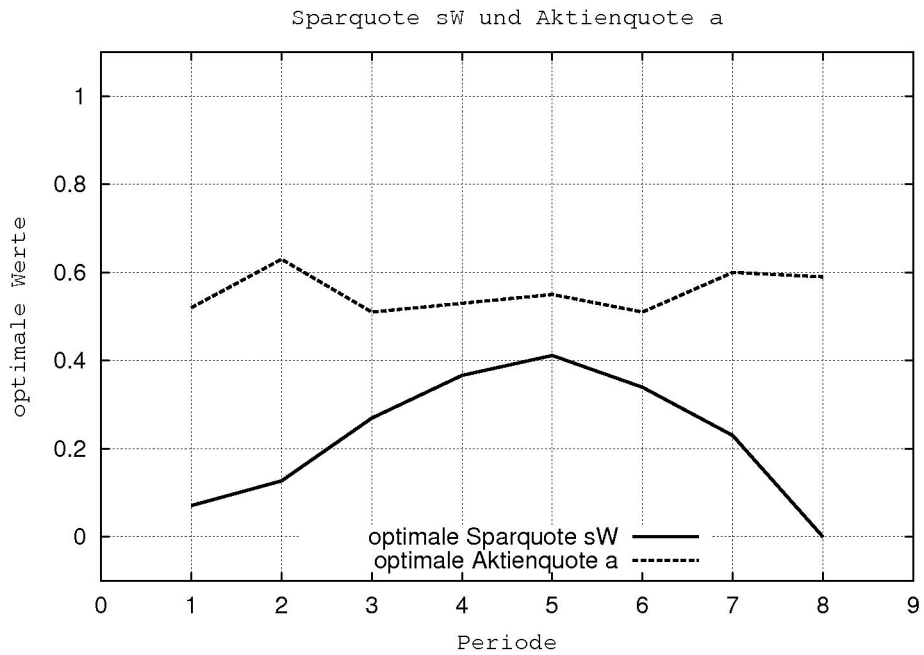


Abbildung 16: Spar- und Aktienquoten für CRRA-Nutzen

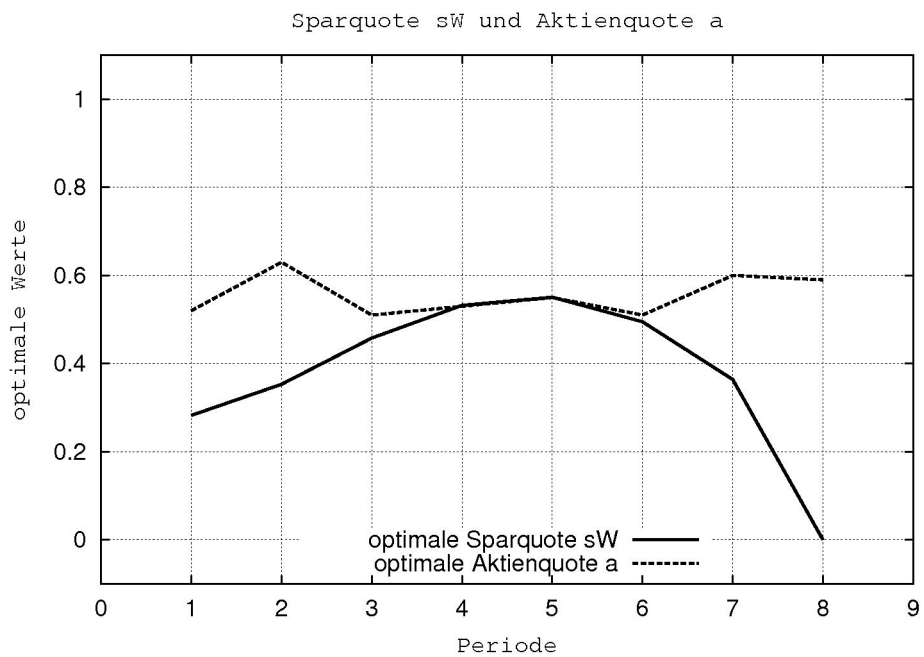


Abbildung 17: Spar- und Aktienquoten für „Spirit of Capitalism“-Nutzen

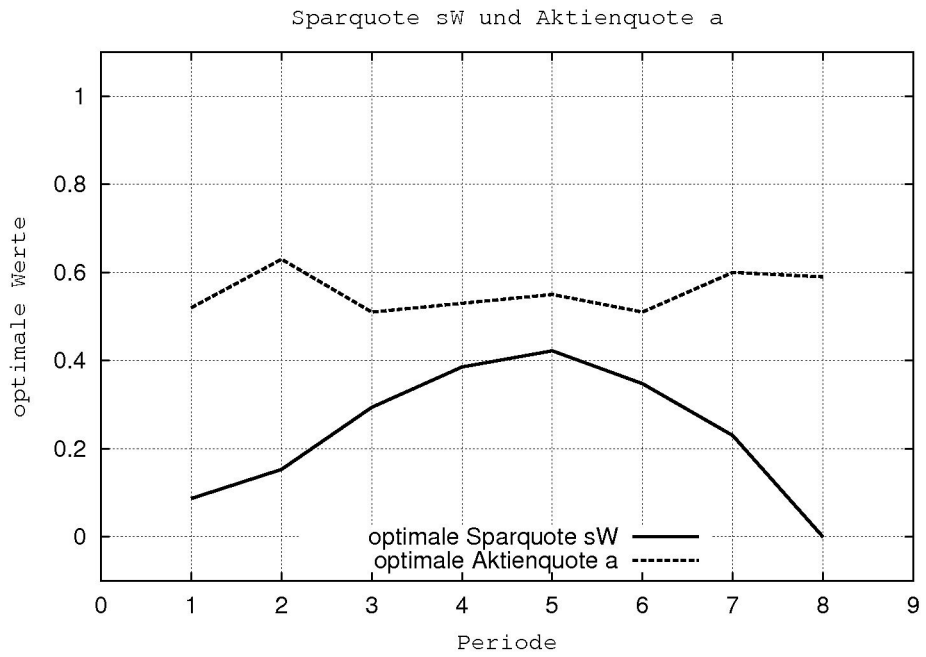


Abbildung 18: Spar- und Aktienquoten für „Consumption Externality“-Nutzen

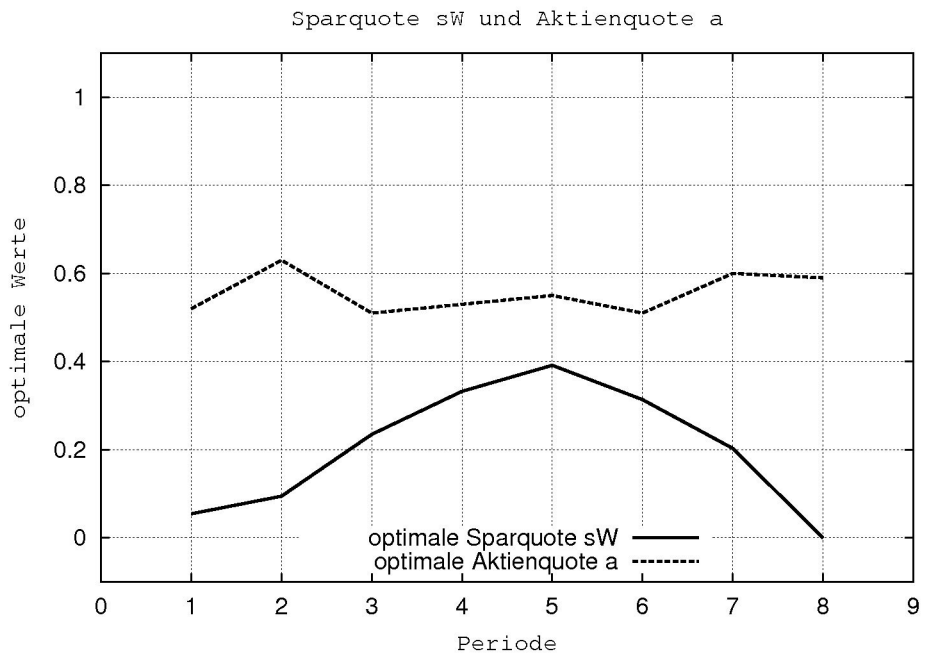


Abbildung 19: Spar- und Aktienquoten für TRA-Nutzen

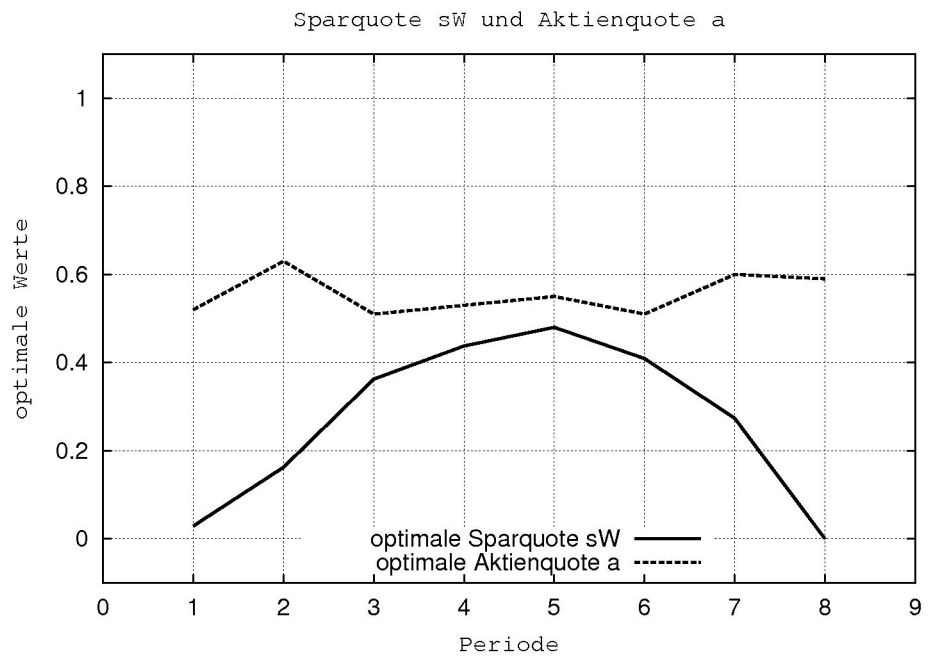


Abbildung 20: Spar- und Aktienquoten für Epstein-Zin-Nutzen

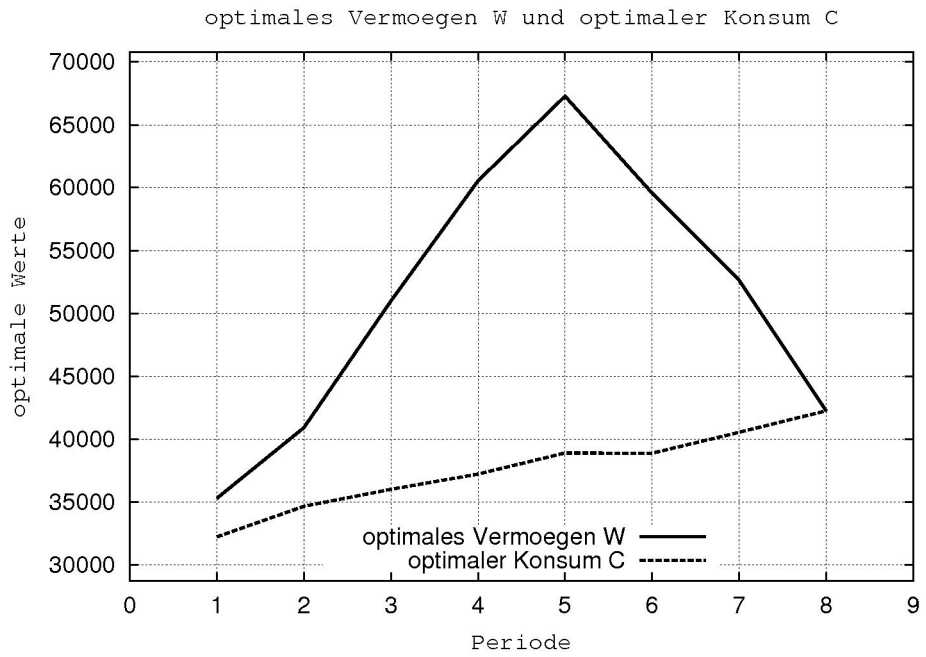


Abbildung 21: „Consumption Externality“ Vermögens- und Konsumpfad

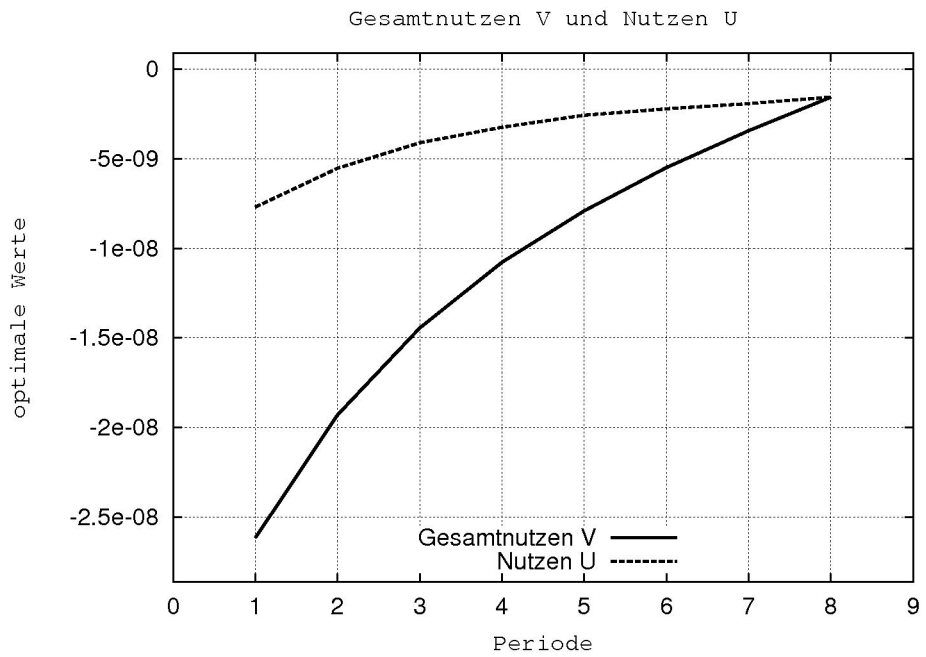


Abbildung 22: „Spirit of Capitalism“ Periodennutzen U und Gesamtnutzen V

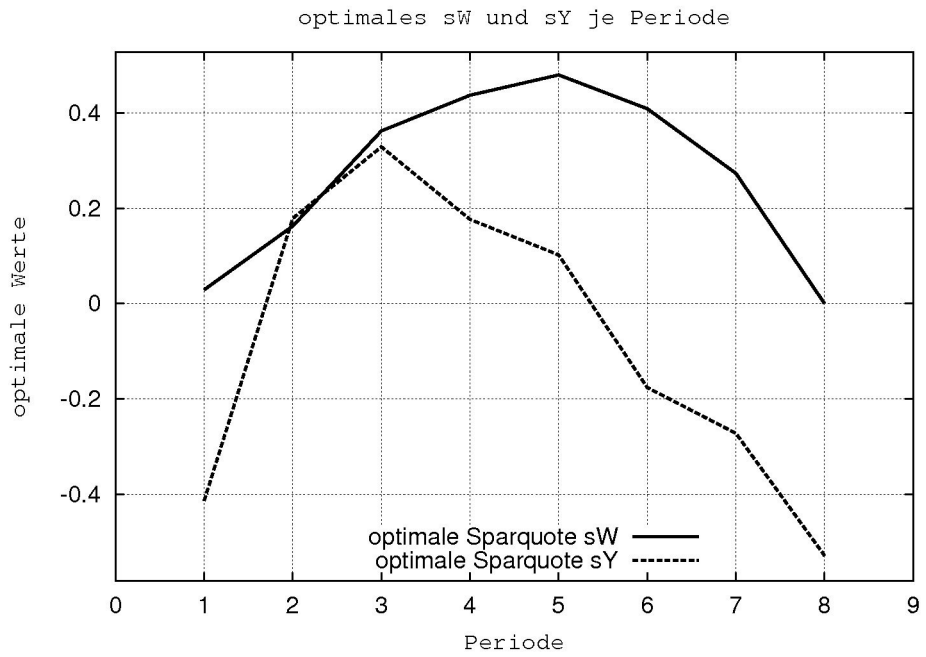


Abbildung 23: Vermögens- und Einkommenssparquote bei Epstein-Zin-Nutzen

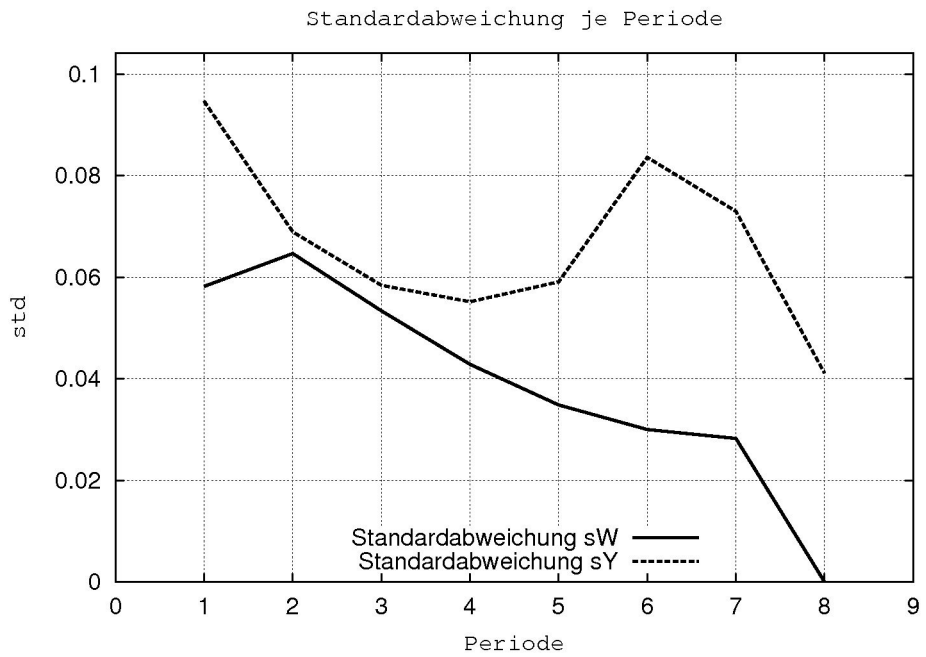


Abbildung 24: Standardabweichungen von s_W und s_Y mit TRA-Nutzen

5.2 Auswirkungen verschiedenartiger Nutzenfunktionen

Zum Vergleich der Berechnungsergebnisse werden deren Daten in Grafiken gemeinsam dargestellt.

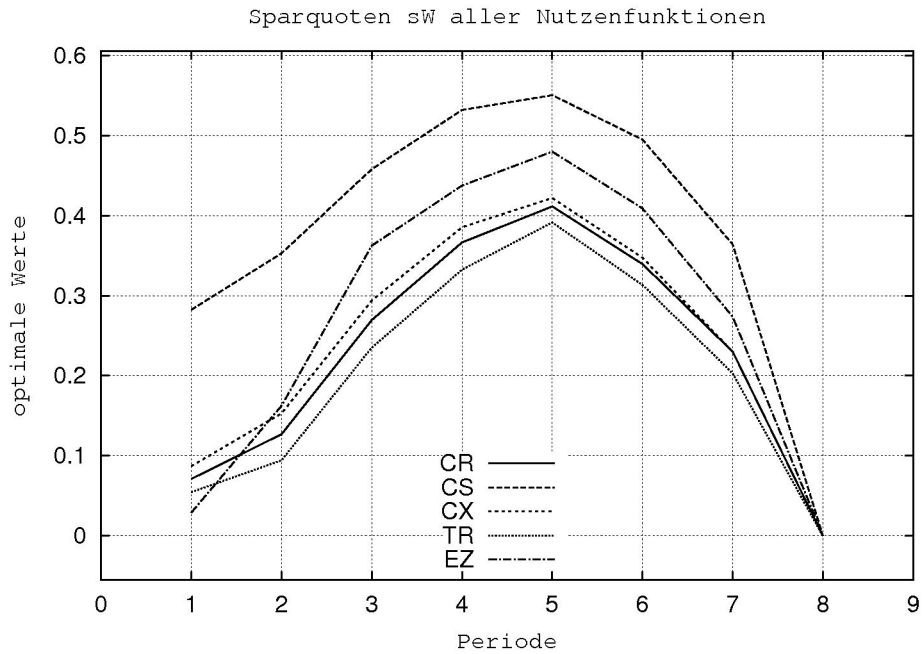


Abbildung 25: Vergleich der Vermögenssparquoten sW

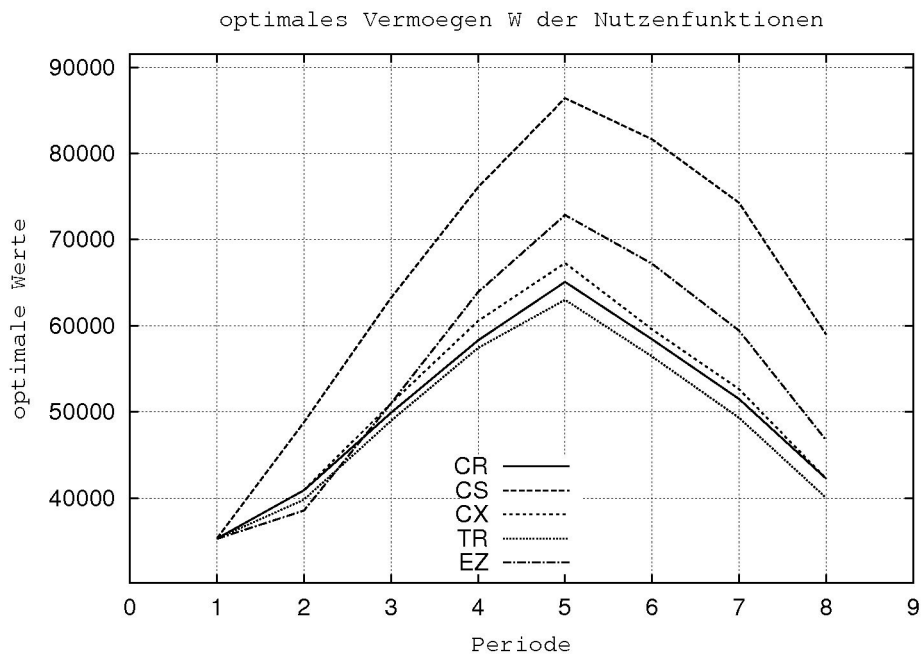


Abbildung 26: Vergleich der Vermögenspfade W

Für die Aktienquote α wird von den Untersuchungen ein insgesamt sehr stabiles Ergebnis geliefert. Alle Nutzenfunktionen führen zu exakt den gleichen und relativ gleichförmigen Werten, deren Durchschnitt knapp unter $\alpha=0,6$ liegt. Ein konstantes α auf Basis von Volatilität und Renditen sollte eigentlich für die verwendeten μ und σ geringer ausfallen. Das verfügbare Arbeitseinkommen hebt allerdings die klassische Beziehung auf, da es eine absichernde Wirkung hat, was eine Verdrängung der sicheren Anlage zugunsten der unsicheren erklären kann. Somit ist die dargestellte Aktienquote zumindest in dieser Hinsicht nachvollziehbar. Allerdings erscheint der Einfluss der simulierten Aktienrenditen hier zu dominant.

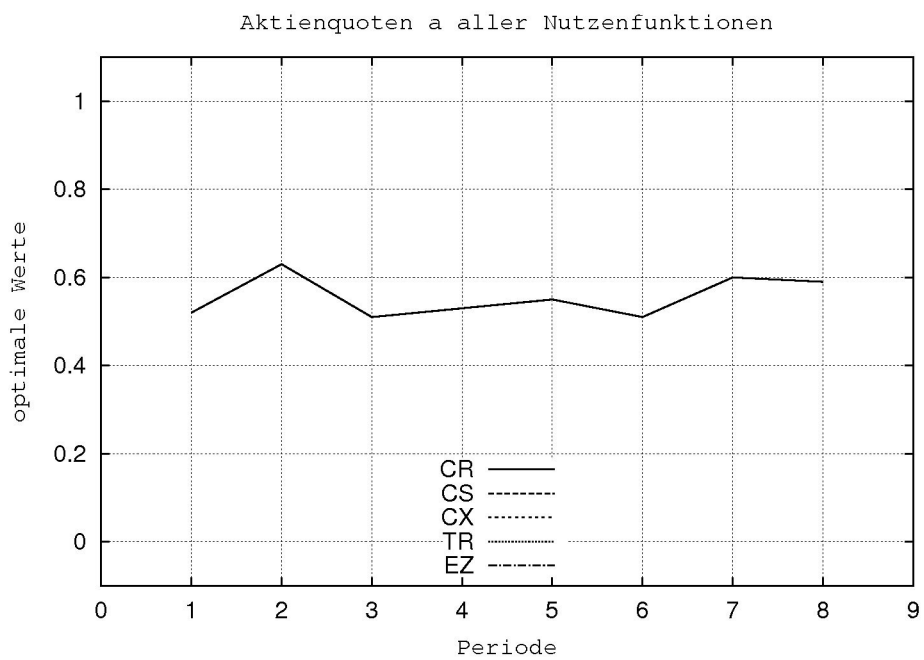


Abbildung 27: Vergleich der Aktienquoten α

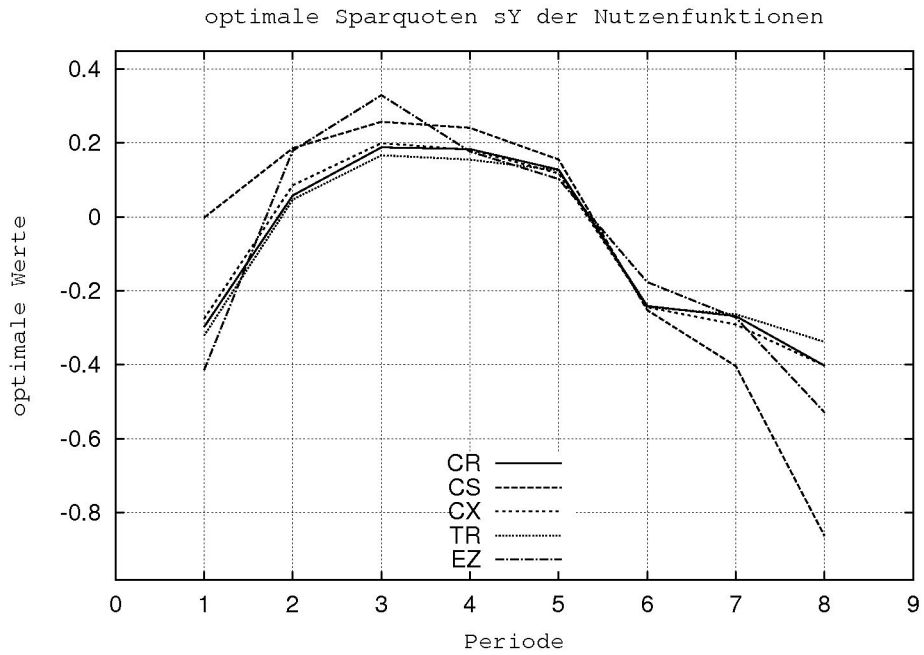


Abbildung 28: Vergleich der Einkommenssparquoten s_Y

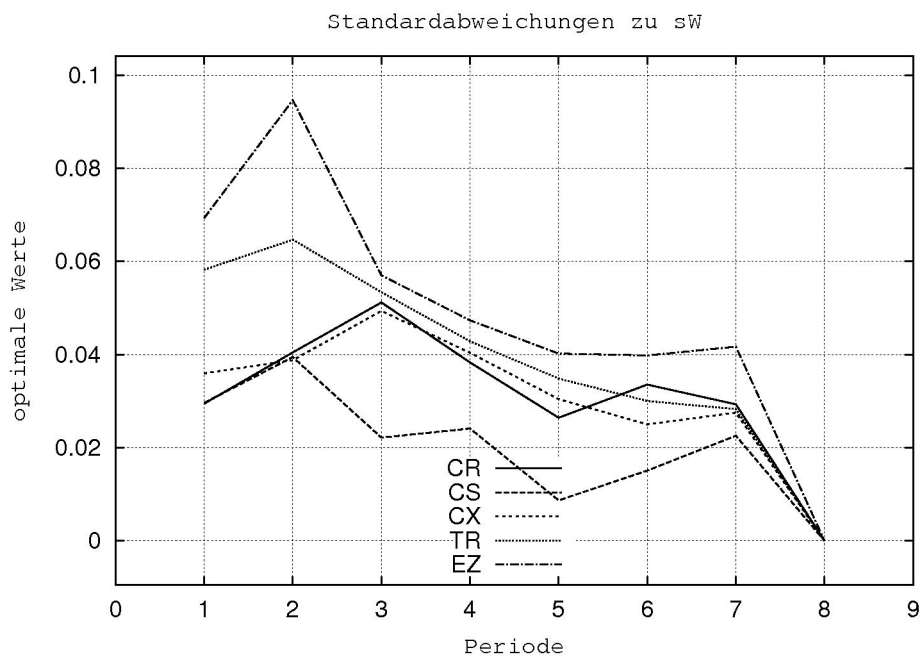


Abbildung 29: Vergleich der Standardabweichungen von s_W

6 Fazit

Die Herausforderungen in der Implementierung, die langwierige Rechendauer und die nur begrenzt aussagekräftigen Berechnungsergebnisse weisen auf eine Reihe offener Punkte hin.

Möglicherweise ist die verwendete Rastersuche für die numerische Bestimmung des Maximums im Kontext des Lebenszyklusmodells nicht der richtige Ansatz, wenn das Vermögen mit seinem pyramidenförmigen Verlauf als Variable genutzt. Ein effizienteres Optimierungsverfahren könnte eine Quadratische Programmierung sein und wäre als Alternative prüfenswert. Auch eine modifizierte Form der Diskretisierung könnte zu kürzeren Rechenzeiten führen.

Eine Implementierung in einer höheren Programmiersprache oder in der kommerziellen Anwendung Matlab sind weitere Verbesserungsansätze. Ersterer sollte zu schnelleren Berechnungen bei gleichem Programmablauf führen, letzterer würde zumindest eine komfortablere Arbeitsumgebung und eine breitere Auswahl an möglicherweise effizienteren Rechenwerkzeugen mit sich bringen.

Wenn die Optimierung beschleunigt ist, kann eine Iteration der Bellman-Gleichung in Angriff genommen werden. Auch eine feinere Diskretisierung der Entscheidungsvariablen sW und α kann zu einer höheren Aussagekraft führen.

Des Weiteren ist grundsätzlich zu prüfen, wie innovativere Ergebnisse für die Aktienquote α erreicht werden können.

Bezogen auf die Sparquoten sW und sY erscheinen die Ergebnisse wertmäßig in Ordnung und grundsätzlich aussagefähig. Mit CRRA-, TRA- und „Consumption Externality“-Nutzenfunktionen kann für die Sparquote sW ein prinzipiell ähnlicher Verlauf ermittelt werden. Die Ergebnisse der „Spirit of Capitalism“-Nutzenfunktion liegen auf einem deutlich höheren Niveau. Möglicherweise kann eine fundierte Parameteranalyse noch zu einer weiteren Annäherung führen, woraus sich wiederum Aussagen über die Interdependenzen zwischen den Parametern ableiten lassen. Lediglich die Optimierung mit der Epstein-Zin-Nutzenfunktion unterscheidet sich erkennbar im Verlauf. Allerdings kann auch diese Funktion bei entsprechend trivialer Parameterwahl in eine CRRA-Nutzenfunktionen transformiert werden.

Die untersuchten Nutzenfunktionen stellen ein vielfältiges Instrumentarium dar, das im Kontext rationaler Erwartungen und Entscheidungen eine bedeutende Rolle spielt. Sie haben mit extern vorgegebenen Parametern deutliche Auswirkungen auf Untersuchungsergebnisse, was jedoch eng damit verbunden ist, dass sie parametersensibel sind.

Anhang

Alle Berechnungen und alle Grafiken wurden mit dem Programm Octave durchgeführt bzw. erstellt. Octave ist ein unkommerzieller Matlab-Klon und läuft als Terminalprogramm auf dem Betriebssystem Linux, z. B. im KDE-Terminal Konsole. Es bietet alle grundlegenden mathematischen Funktionen und in geringem Umfang auch einige, die nicht in einer Matlab-Basisversion enthalten sind. Allerdings fehlen auch wesentliche hoch entwickelte Matlab-Funktionen.

Version: Octave 3.0.0

Lizenz: GNU General Public License

Download: www.gnu.org/software/octave/

Die Untersuchung wurde auf folgender Umgebung durchgeführt:

Hardware

i386 AMD Athlon™ 1300 MHZ 512 KB Cache

RAM 512 MB

Software

GNU Octave version 3.0.0 for i686-pc-linux-gnu

KDE 3.5.9 "release 49.1"

Linux 2.6.25.16-0.1-pae i686

openSUSE 11.0 (i586)

Literaturverzeichnis

Adda, Jérôme; Cooper, Russell (Adda/Cooper 2003): Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications, Cambridge MA: The MIT Press, 2003

Alpanda, Sami; Woglom, Geoffrey R. (Alpanda/Woglom 2007): The Case against Power Utility and a Suggested Alternative: Resurrecting Exponential Utility, Amherst College, Department of Economics, <http://ssrn.com/abstract=1032083> (01.06.2009)

Amenc, Noël; Géhin, Walter; Martellini, Lionel; Meyfredi, Jean-Christophe (Amenc/Géhin 2007): The Myths and Limits of Passive Hedge Fund Replication, Nizza: EDHEC Risk and Asset Management Research Centre, 2007

Bakshi, Gurdip S.; Chen, Zhiwu (Bakshi/Chen 1996): The Spirit of Capitalism and Stock Market Prices, in: American Economic Review, Vol. 86, No. 1, 1996, S. 133-157, <http://www.rhsmith.umd.edu/faculty/gbakshi/aer96.pdf> (01.06.2009)

Bernoulli, Daniel (Bernoulli 1954): Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, in: Econometrica, Vol. 22, No. 1., 1954, S. 23-36, <http://www.econ.ucsb.edu/~tedb/Courses/GraduateTheoryUCSB/Bernoulli.pdf> (01.06.2009)

Bicksler, James L. (Bicksler 1974): Theory of Portfolio Choice and Capital Market Behavior: An Introductory Survey, in: Bicksler, James L.; Samuelson, Paul A. (Hrsg.): Investment Portfolio Decision-Making, Lexington MA: Lexington Books, 1974, S. 1-21

Blackburn, Douglas W. (Blackburn 2008): Option Implied Risk Aversion and Elasticity of Intertemporal Substitution, Fordham University, <http://ssrn.com/abstract=927440> (01.06.2009)

Campbell, John Y.; Viceira, Luis M. (Campbell/Viceira 2002): Strategic Asset Allocation, Portfolio Choice for Long-Term Investors, Oxford UK: University Press, 2002

Champernowne, D. G. (Champernowne 1969): Uncertainty and estimation in economics, Teil 3, Edinburgh UK: Oliver & Boyd, 1969

Cocco, João F.; Gomes, Francisco J.; Maenhout, Pascal J. (Cocco/Gomes/Maenhout 2005): Consumption and Portfolio Choice over the Life Cycle, in: The Review of Financial Studies, Vol. 18, No. 2, 2005, S. 491-533

Crossley, Thomas F.; Low, Hamish W. (Crossley/Low 2006): Is the Elasticity of Intertemporal Substitution Constant?, University of Cambridge, Faculty of Economics, <http://www.bde.es/doctrab/seminar/sie0815.pdf> (01.06.2009)

Cuthbertson, Keith (Cuthbertson 2000): Quantitative Financial Economics, Chichester UK: Wiley, 2000

Epstein, Larry G.; Zin, Stanley E. (Epstein/Zin 1991): The Independence Axiom and Asset Returns, in: Journal of Empirical Finance, 2001, Vol. 8, No. 5, S. 537-572, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.41.5455&rep=rep1&type=pdf> (01.06.2009)

Georgiev, Aleksandar (Georgiev 2004a): An Asset Pricing Model with Time-varying Elasticity of Intertemporal Substitution, Université de Lausanne, HEC, DEEP, <http://ssrn.com/abstract=486130> (01.06.2009)

Georgiev, Aleksandar (Georgiev 2004b): On The Use of Elasticity of Intertemporal Substitution, Université de Lausanne, HEC, DEEP, <http://ssrn.com/abstract=488702> (01.06.2009)

Glasserman, Paul (Glasserman 2003): Monte Carlo Methods in Financial Engineering, New York NY: Springer, 2003

Hammami, Salwa M. (Hammami 2007): Horse Race of Utility-Based Asset Pricing Models: Ranking through Specification Errors, American University of Beirut, Institute of Financial Economics: Lecture and Working Paper Series, No. 2, 2007, http://www.wlb.aub.edu.lb/~webifeco/downloads/series2_2007.pdf (01.06.2009)

Hull, John C. (Hull 2006): Options, Futures and other Derivatives, 6. Aufl., Upper Saddle River NJ: Pearson Prentice Hall, 2006

Kaninke, Marc (Kaninke 2004): Analyse strategischer Risiken, Frankfurt am Main: Bankakademie 2004

Keeney, Ralph; Raiffa, Howard (Keeney/Raiffa 1976): Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, New York NY: Wiley, 1976

Li, Zhi; Yin, Xiaopeng (Li/Yin 2004): Endogenous Business Cycles with Consumption Externalities, Econometric Society 2004 North American Summer Meetings, No. 402, <http://repec.org/esNASM04/up.23750.1075492438.pdf> (01.06.2009)

- Liu, Fang; Sercu, Piet (Liu/Sercu 2008)*: Estimating the Intertemporal Substitution Elasticity, Katholieke Universiteit Leuven, <http://ssrn.com/abstract=1344231> (01.06.2009)
- Liu, Wen-Fang; Turnovsky, Stephen (Liu/Turnovsky 2002)*: Consumption Externalities, Production Externalities, and the Accumulation of Capital, in: *Journal of Public Economics*, Vol. 89, 2005, S. 1097-1129, <http://www.econ.washington.edu/user/sturn/Liu-Turnovsky-rev2.pdf> (01.06.2009)
- Ljungqvist, Lars; Sargent, Thomas J. (Ljungqvist/Sargent 2004)*: *Recursive Macroeconomic Theory*, 2. Aufl., Cambridge MA: The MIT Press, 2004
- Mankiw, N. Gregory (Mankiw 2003)*: *Makroökonomik*, 5. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel, 2003
- Mehra, Rajnish; Prescott, Edward C. (Mehra/Prescott 1985)*: The Equity Premium: A Puzzle, in: *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, No. 2, S. 145-161, <http://www.academicwebpages.com/preview/mehra/pdf/The%20Equity%20Premium%20A%20Puzzle.pdf> (01.06.2009)
- Merton, Robert C. (Merton 1997)*: *Continuous-Time Finance*, 8. Aufl., Malden MA: Blackwell, 1997
- Poddig, Thorsten; Dichtl, Hubert; Petersmeier, Kerstin (Poddig/Dichtl/Petersmeier 2003)*: *Statistik, Ökonometrie, Optimierung*, 3. Aufl., Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch, 2003
- Pratt, John W. (Pratt 1964)*: Risk Aversion in the Small and in the Large, in: Bicksler, James L.; Samuelson, Paul A. (Hrsg.): *Investment Portfolio Decision-Making*, Lexington MA: Lexington Books, 1974, S. 49-65
- Qian, Edward; Hua, Ronald; Sorensen, Eric (Qian/Hua/Sorensen 2007)*: *Quantitative Equity Portfolio Management*, Boca Raton FL: Chapman and Hall/CRC, 2007
- Ramsey, Frank P. (Ramsey 1931)*: *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, London UK: Paul Kegan, 1931
- Rogall, Holger (Rogall 2006)*: *Volkswirtschaftslehre für Sozialwissenschaftler*, Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 2006
- Romer, David (Romer 2001)*: *Advanced Macroeconomics*, 2. Aufl., New York NY: McGraw-Hill Higher Education, 2001
- Sobol, I. M. (Sobol 1991)*: *Die Monte-Carlo-Methode*, Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1991

van den Heuvel, Skander (van den Heuvel 2008): Temporal Risk Aversion and Asset Prices, AFA 2009 San Francisco Meetings Paper, <http://ssrn.com/abstract=1099582> (01.06.2009)

von Neumann, John; Morgenstern, Oskar (von Neumann/Morgenstern 1953): Theory of Games and Economic Behavior, 3. Aufl., Princeton NJ: University Press, 1953

von Nitzsch, Rüdiger (von Nitzsch 2002): Entscheidungslehre, Stuttgart: Schäffer-Poeschel, 2002

Quellenverzeichnis

Adda, Jérôme (*Adda* 2003): Getting Started with Matlab, 2003, <http://www.ucl.ac.uk/~uctpjea/matlab.pdf> (01.06.2009)

Statistisches Bundesamt (*Destatis* 2008): Bevölkerung und Erwerbstätigkeit, Sterbetafel Deutschland 2005/07, Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2008 <http://www.destatis.de/jetspeed/portal/cms/Sites/destatis/Internet/DE/Content/Statistiken/Bevoelkerung/GeburtenSterbefaelle/Tabellen/Content100/SterbetafelDeutschland,property=file.xls> (01.06.2009)

Ehrenwörtliche Erklärung

Versicherung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich übernommene Sätze und Satzteile sind als Zitate belegt, andere Anlehnungen hinsichtlich Aussage und Umfang unter den Quellenangaben kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht.

Ort, Datum: _____

Unterschrift: _____